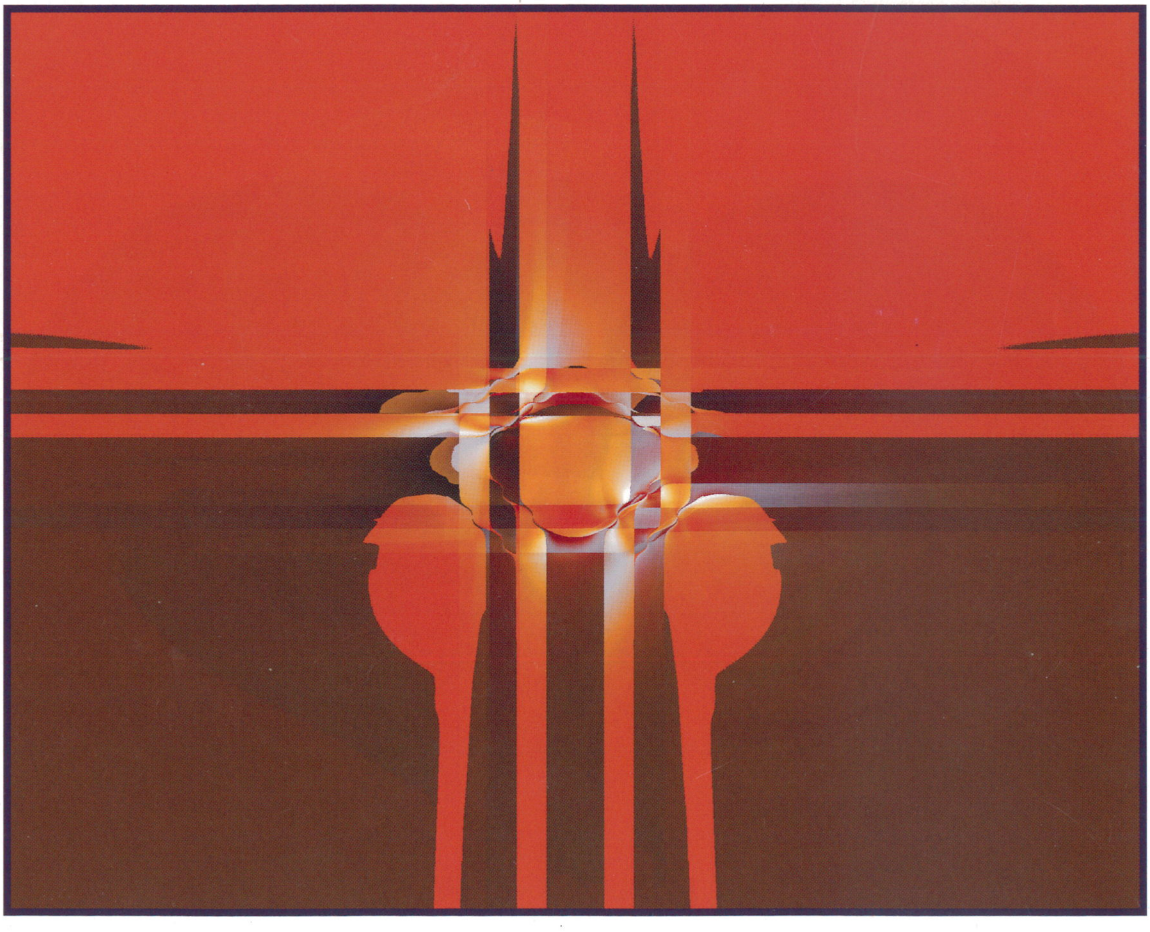
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2009年1月1日発行　第47巻1号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

1
2009

特集 グラフィックでわかる物理
イメージから広がる直観的理解



No.547
サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 547 January 2009

グラフィックでわかる物理

イメージから広がる直観的理解

表紙：戸川　隼人

January 2009 MATHEMATICAL SCIENCES Number 547

グラフィックでわかる物理

Visualな理解

原　康夫

1. はじめに

「グラフィックでわかる物理—イメージから広がる直観的理解」というこの特集号の趣旨は，物理教育におけるvisualな理解の有効性を検討し，どのように活用すればより有効になるのかを探ろうということである．Visualの名詞のvisionには，視覚の他に心に描く像という意味もあるので，頭の中に描く静止画や動画も含めて考える．

ところで，物理学は事実に基づいて論理的に理解するものだと考えている読者の中には，物理を絵，図，イラスト，写真あるいは動画などを用いて直観的に理解し，あるいは理解させるという手法に違和感をもつ人がいるかと思う．

この小論で，私は基礎になる事実の理解においても，事実に基づいて論理的に理解する過程においても，visualな手法がきわめて重要な役割を演じることを指摘したい．

2. 古典力学の基礎を築いたvisualな実験

物理の歴史を振り返ると，イメージと直観的な手法は重要な役割を演じてきた．ピサの斜塔での自由落下実験および長い糸に吊り下げられたおもりが最低点付近で等速直線運動するので摩擦のない平面上で球は等速直線運動するはずであるというガリレオによる慣性の法則の思考実験は，ニュートン力学への道を拓いたvisualで直観的手法の見事な例である．また，パリ市民に地動説を疑問の余地なく信じさせたのは，振動面が周期24時間/$\sin\theta$で回転することを市民の前で示したフーコーの振り子の実験であった（θは緯度）．

これらの実験はマクロな世界の運動の法則と力の法則および慣性座標系を，数式に頼ることなく直観的に理解させるのに有効であった例である．この事実は教育の現場でもっと重視されるべきであろう．

3. 波動力学はvisualな量子力学

眼に見えるマクロな世界の運動法則ばかりでなく，目に見えないミクロな電子の運動法則である量子力学の理解でも，visualな理解は重要であった．量子力学は1925年にハイゼンベルクによって行列力学として誕生した．しかし，物理量は交換関係に従う行列だとする行列力学は取りつきにくい．多くの人が量子力学を理解できるようになったのは，visualに理解できる波動関数が主役を演じる波動力学が，1926年にシュレーディンガーによって発見されてからであった．現在，初等量子力学の教育は波動力学の教育だと言ってもよい．例えば，水素原子と言うと我々は基底状態の波動関数をイメージする．

しかし，波動力学に現れる波動関数は，そのものが観測の対象になる古典的な波とは異なり，絶対

値の２乗が電子を発見する確率を与える確率波である．アインシュタインやシュレーディンガーが受け入れられなかった波動関数の確率解釈を，初心者が簡単に理解して受け入れるとは思えない．

波動と粒子の二重性を示す電子を理解する鍵になる波動関数の確率解釈を初心者に理解させる最善の方法は，外村彰博士による電子ビームによる干渉縞の形成過程の写真を見せるという visual な方法であろう．

4. 計算に便利なファインマン図

量子電磁気学は朝永，シュウィンガーとファインマンによって定式化された．現在，量子電磁気学の計算は，場の演算子という抽象的な object を扱う朝永–シュウィンガーの超多時間理論ではなく，電子や光子の運動，生成，消滅を表すファインマン図を描いて，それにファインマンの規則を適用して計算するという visual な方法によって行われている．これも物理教育における visual な方法の有効性の一つの証拠と言えよう．その上，ファインマンの visual な方法には，項の見落としの危険性が少ないという利点もある．

5. 画像処理能力

静止画や動画を見せて直観的に理解させるには，画像処理能力が必要になる．画像処理能力には先天的な能力と後天的な能力がある．先天的な画像処理能力として代表的なものが，波長が $(4\sim 8)\times 10^{-7}\,\mathrm{m}$ の電磁波を３原色に変換してカラー画像にする能力である．画像を見ていろいろな感情を抱くのも広い意味での画像処理能力であろう．

物理学では，ルールに従って画像を作成するので，画像で示された情報を理解するには，作成時のルールを逆に辿って画像処理する後天的な能力が必要になる．その代表的な例が，紙や黒板という２次元空間に描かれた３次元の画像の理解である．このような場合の有名な例として，電流に作用する磁気力のフレミングの左手の法則がある．

微積分を必要とする場合にはグラフを利用して直観的に理解させるのが有効であるが，この場合にもグラフの読み方という画像処理能力を習得することが必要である．

米国でも日本でも，「辺の長さが２倍になれば正方形の面積は何倍になるか」という問に，多くの大学生が「２倍」と答える．つまり，次元の概念を理解していない．次元の理解には図による直観的理解法が有効なことは言うまでもない．

6. モノクロ画像とカラー画像

画像にはモノクロ画像とカラー画像がある．モノクロ画像よりもカラー画像のほうが含まれている情報量が多く，例えば，異なる物理量のベクトルを異なる色で表せるなどの利点がある．我々がモノクロのテレビ画面を見たときに感じる違和感を考えると，フルカラー印刷の教科書には心理的なプラスの効果があると考えられる．この効果はこれから検証すべき問題である．

運動を直観的に理解するには，静止画より動画のほうが適していると考えられる．

7. おわりに

公理に基づいて論証によって定理を導く幾何学基礎論での「証明の論証を機械的に追跡して行くことは図を見ないでもできるかも知れませんが，証明を理解することは図を見なければできないのです」と小平邦彦博士は断言されたそうである[1]．物理を事実に基づいて論理的に理解する難しさを示唆しているのではなかろうか．

最後に，物理学における直観的描像の重要な例として波動力学を指摘し，さらに文献1)を紹介してくださった亀淵迪博士に感謝します．

参考文献

1) 松本幸夫，別冊・数理科学「多様体の広がり」120 頁．

（はら・やすお，筑波大学名誉教授）

グラフィカルな教科書と物理教育

その過去・現在・未来

右近　修治

1．19 世紀の教科書の精緻な図版

19 世紀の最もポピュラーな教科書はフランスのガノーによるものである．アトキンソンによる英訳が出版された後，「アトキンソンのガノー」として親しまれるようになり，世界標準の教科書となる．1863 年の初版時に 780 ページであったものが 1910 年の最終版では実に 1225 ページの大冊に変貌していた[1)]．マイケルソンが 1870 年に合衆国海軍兵学校で物理を学んだときのテキストもこのガノーであった．

ガノーと現代の教科書と見比べると，その精緻な図版に驚かされる[2)]．実験装置があたかも目の前にあるかのごとく，その些末な細部までが，現代の我々から見て必要とは思われないほど精密に描かれている．図 1 は同書にあるアトウッドの装置，図 2 はモーリンの装置である．アトウッドの装置はよく知られているので説明の要はないだろう．モーリンの装置は落下物体の軌跡を記録する装置である．縦に軸を持つ円筒を一定速度で回転させ，その上に巻き付けてある記録紙の上に，円筒に沿って落下する物体の軌跡を記録する．円筒が静止していれば，単に垂直な線が描かれるだけであるが，一定速度で回転していれば放物線が記録される．これから物体の時間ごとの落下距離がわかる．コンピュータもビデオカメラもない時代に，それに代わるうまい工夫を考えついたものだ．

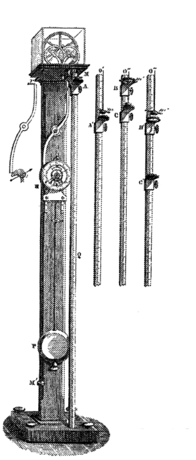


図 1　アトウッドの装置．

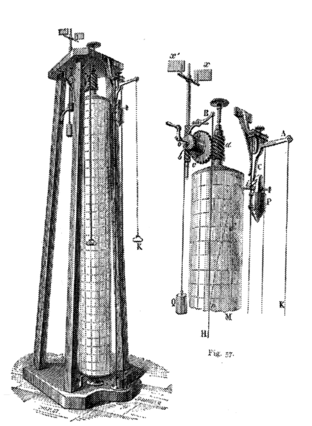


図 2　モーリンの装置．

19 世紀の「自然哲学（natural philosophy）」，「実験哲学（experimental philosophy）」の教科書は皆，ガノー同様，装置の精緻な図版を掲載している．シェイピン，シェーファーらによれば，実験装置の精緻な図版は「実験哲学」が誕生した頃のボイルやフックの時代，17 世紀にまで遡る[3)]．

17 世紀は，実験により真理を獲得する方法の正当性がまだ問われていた時代であった．『リバイアサン』でおなじみのホッブスとボイルとの間で，まさにこの点に関わる論争が繰り広げられていた時代であった[3)]．そうした時代に，一連の真空ポンプの実験事実を他の実験哲学者にどのようにして認めさせたらよいだろうか．現代のような，科学研究機関の正当性が確立されている時代であれば，問題ない．マスコミが新しい発見の事実を報道すれば，公衆にそれが科学的真理として受け入

れられる．公衆にそれを事実かどうか確かめる手段がなくても，どこかの専門家が必ずチェックしているはずだからである．こうした科学の研究制度に対する信頼は，長い年月をかけ，科学の実績により構築されてきたものだ．しかしボイルの時代にはそれがまだない．

実験哲学という以上，実験を直接見てもらうのが一番であるが，一般読者に対しては無理である．実験装置の複製を著名な研究者に送ってもよいが当然限界がある．シェイピンらによれば，そこでボイルの取った戦略は次のようなものであった．装置の複製品を送るのが無理であるのならば，精密な図版による装置の「複製」を提示すればよい．

真空ポンプは簡単に作れないので，追試は難しい．しかし実験事実は認めてほしい．そこでボイルは精巧な図版の内に実験装置を「複製」し，それによって実験装置が確かに実在すること，そしてその実験が実際に行われたことを保証することにした．また，実験の手順を過剰なほど細部にわたって記述することにより，あたかも読者が実験の場にいるかのような，臨場感を持たせることにしたのである．シェイピンらはこれを「仮想目撃(virtual witnessing)」と呼んでいる．

ボイルの実験の事実性は，実験器具の精密な図版が支えていた．

ガノーの教科書の図版はまさにこうしたやり方の延長にあるものである．「実験哲学」の教科書は誕生の時点からすでにグラフィカルだった．精緻な図版は実験の事実性を保証する生命線だった．

2. ジョンソン博士の掛図

さて，図 1，図 2 に戻る．19 世紀のガノーの読者は手元にこのような立派な装置があったのだろうか．否…それは言うまでもないことだ．「実験哲学」とはいうものの，実際にこうした高価な装置で実験をしながら教科書を読み進めることなど，教科書執筆者も先生も全く想定していなかった．しかし本文で装置の働きを詳述し，精緻な図版を掲載すれば，読者は実際に実験で結果を確かめた気になったのである．精緻な図版は実験することの代替物であった．これが当時の実験哲学——物理学の教科書のやり方であった．

19 世紀後半のアメリカでは，イギリスのスペンサーが強く科学教育振興を説いたことも影響し，自然科学教育を取り入れる動きが活発化した．その中で特に強調されたのが学生実験の教育現場への導入である[4]．しかし，科学教育用の実験装置が高価だったことや，実際に実験指導のできる教員が不足していたこともあり，実験実習の伴った物理教育が現場に普及するには，世紀の変わり目まで待たなければならなかった．

この頃の実情を示す興味深い資料がある．図 3 は学校現場に普及した「ジョンソン博士の科学実験器具の代わりをする掛図」と呼ばれるものである．広告には次のようにある．「500 の図版を含む頑丈な掛図セットです．図版は総計 6000 ドル以上の高価な実験器具を描いたもので，…公立学校や大学で使える，高価な実験器具の安くて丈夫な代替品となるように作られています．掛図 10 枚セットで 15 ドル．」[5] この掛図，白黒が逆転しているようであるが，よく見るとそうではない．実は黒板にチョークで図を描いた風を装い，臨場感を少しでも高めようとした工夫である．19 世紀後半のアメリカの高校では，実験器具を描いた掛図を提示することで，実験をしたことにしてしまっていた．

「ジョンソン博士」を遠い過去の出来事と嗤って

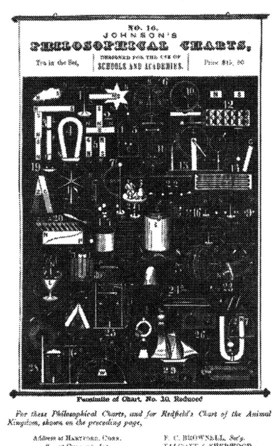


図 3　ジョンソン博士の掛図[5]．

はいけない．現在でも受験指導に忙しく，生徒実験の時間を持てない高校では「物理図解」などの写真資料集が実験代わりに活躍している．

3. 方程式を図解する

一方，19 世紀の理論物理学の教科書は驚くほど図版に対して無愛想である．当時は理論物理学は「応用数学（applied mathematics）」，「混合数学（mixed mathematics）」などと呼ばれていた．19 世紀を代表する理論物理学の教科書にトムソン，テイトによる『力学と運動学の原理』[6]があるが，紙面は数式で埋め尽くされ，幾何学図形以外の図版らしいものはほとんど見当らない．現在では実験物理も理論物理も同じ物理であるが，19 世紀には両者は全く異なる伝統上にあり，それぞれの読者は別世界の住人であった．

イギリスの理論物理学は，ケンブリッジ大学で実施されていたトライパス（Tripos）試験と呼ばれる奇妙な制度から出現した[7]．もともとは，学士号を取得するための哲学や神学などに関する公開討論であった．トライパスは中世以来，議長が座っていた椅子が 3 本足の椅子であったことに由来する名称である．数学トライパス試験の最優等生はシニア・ラングラー（wrangler），2 番目以降はセカンド・ラングラー，サード・ラングラーなどと順位付けされる．数学トライパスを何番で突破して卒業したかは一生付いて回り，高位のラングラーには深い尊敬と権威が伴った．ストークスはシニア・ラングラー，ウィリアム・トムソン（ケルビン卿）や J.C. マクスウェル，J.J. トムソンは，セカンド・ラングラー，グリーン関数のジョージ・グリーンはフォース・ラングラーである．

19 世紀初め，ケンブリッジにフランスで長足の進歩を遂げた解析学が流入し，いわゆるケンブリッジ解析革命が起きる．数学トライパスは解析学の筆記試験へと大きく傾斜していく．学生はひたすらトライパス試験高位突破のためだけに，チューターと呼ばれる数学トライパス受験指導のエキスパートの下，問題演習の特訓を積んだ．ストークスの定理はトライパス試験に連動するスミス賞の試験官をしていたストークスがこの定理を出題したことから命名されているが，もともとのアイデアはウィリアム・トムソンがストークスに宛てた私信に含まれている[8]．

ウォーウィックはケンブリッジのラングラーたちが「混合数学」の学問領域とその学び方の伝統を築き上げ，それが 20 世紀の理論物理学へと変貌する過程を詳細に記述している[7]．J.C. マクスウェルの一連の論文や，主著『電磁気学論考』はまさに彼がこうした受験勉強の中で獲得した解析の道具と形式を駆使して構築されているのである．ちょうどストークスがストークスの定理を出題したときの受験生が J.C. マクスウェルである[8]．マクスウェルによる電磁気学の基礎付けにストークスの定理の果たした役割を考えると，そこに運命の導きさえ感じるほどだ．

一方，19 世紀終わりには電力システムや電信技術が重要性を増し，技術者が電磁波や交流理論の基礎を学ばなければならない状況が出現した．しかしトムソン・テイトや『電磁気学論考』のようなケンブリッジ・ラングラー風のテキストは，トライパス受験の部外者がアクセスできるようなものではない．そこで考案されたものが，難解な方程式を図解する，という画期的なアイデアである[9]．図 4 はカップによる最も初期の図解で 1888～1889 年頃のものである．これは現在では交流電流，電圧を表すベクトル図に変貌している．この図解はラングラー風理論物理学が現代的な物理の教科書へ

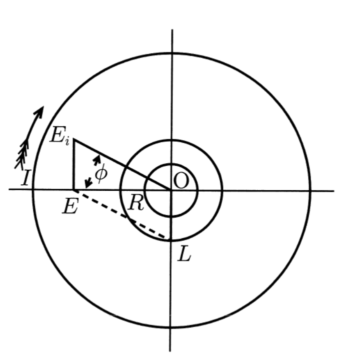


図 4　カップによる交流の「時計盤図」[9]．ベクトルの回転の向きは現在と逆である．

と変貌していく過程で必須のものであった．それが技術者への基礎理論の浸透という過程で生じたことは誠に興味深い．

4. 教科書ライター，ミリカン

ロバート・ミリカンと言えば，「油滴の実験」や「プランク定数の測定」でよく知られているが，アメリカ物理教師協会（AAPT）が毎年物理教育で優れた業績を残した人に与えているミリカン・メダルにもその名を刻んでいる．彼は物理教育の分野でも傑出した人物なのである．

ミリカンはコロンビア大学で学位を取り，ヨーロッパ留学の後，1896 年にシカゴ大学に移った．そこでマイケルソンの下，物理入門コースを担当する．シカゴ大最初の 12 年間は 1 日に 12 時間仕事をし，半分は研究に，残り半分は教育と物理教科書の執筆に没頭したという[10]．

シカゴ大で物理を担当するうちに，入学者の物理的素養があまりにも貧しいことに気がついたミリカンは，高校の新しい物理教科書の必要を痛感し，マイケルソン門下生のゲイルと共にその執筆に乗り出す[11]．我々を取り巻く物理世界はどのようにしてあるのか，またどうしてそうなっているのかを理解してもらうことを第一の目的とし，ついで当時めざましく進展する科学技術が果たす生活と産業への役割を重視した．そのために，最先端技術との関わりを示す豊富な写真と図解を多数掲載した[12]．実験や実験器具以外の，明白な意図を持った図解と写真が教科書に登場したのである．

『物理入門コース』(1906) から始まり，『実用物理』(1920)（図 5)，『新基礎物理』(1936) とミリカン・ゲイルの教科書はタイトルを変えながら 30 年間，高校の標準的教科書の地位を独占して売れ続けた．しかしこの間，内容の改変はほとんどない．ミリカンはひたすら図解と写真をアップトゥデイトし続けたのであった．ここにビジュアルに生徒の興味関心を引きつけるという，とても現代的な教科書が出現したのである．ミリカンの教科書戦略はそのまま現在の教科書にも引き継がれている．

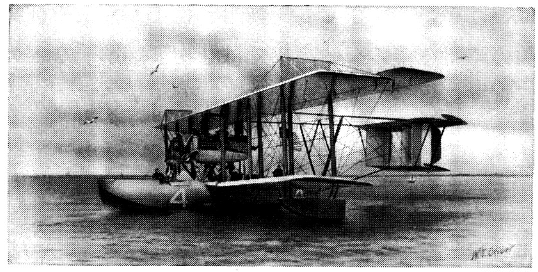
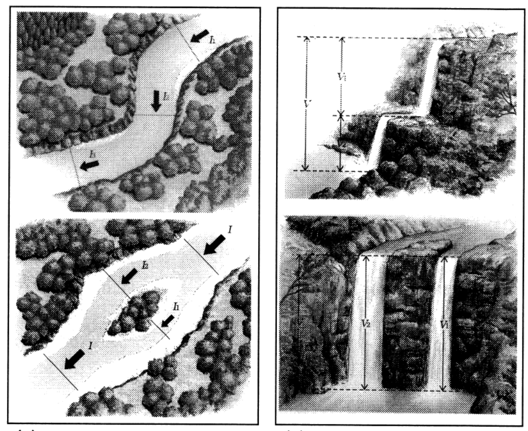


図 5　『実用物理』(1920) の口絵には早くもその前年 1919 年 5 月に初めて大西洋横断飛行に成功した NC-4 飛行機の勇姿がカラーで掲載されている[13]．



(a)　(b)

図 6　水流モデルによる (a) 電流と (b) 電圧の理解[14]．

5. ビジュアル図解の功罪

交流ベクトル図のようなビジュアルな図形は概念的理解を助ける．しかしその一方，ビジュアルであるがために生じる深刻な問題点も存在する．

電気回路を水流モデルにより理解する方式は，中学校理科においても，高校物理においてもほぼ同じである．図 6 は現行の中学校理科第 1 分野の教科書[14]からの引用である．水流のイメージにより，抵抗の直列接続では，各抵抗を流れる電流は等しく，並列接続では，回路が枝分かれする以前の電流は枝分かれした後の各抵抗を流れる電流の合計に等しい (a)．直列接続，並列接続の各抵抗にかかる電圧についても，水流の落差のイメージから理解できる (b)．

これはそのまま高校物理におけるキルヒホッフ

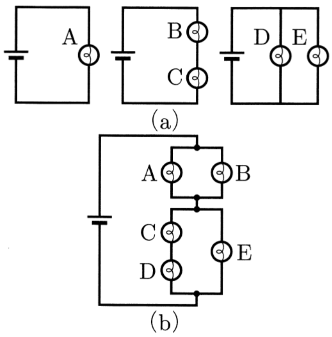


図 7 マクダモットらによる電気回路の問題[15].

の法則に移行する．電圧が電位差となり，電池の働きが水をくみ上げるポンプとなり，抵抗は水の流れを妨害する障害物である．生徒が高校を卒業するまでには，素朴な水流モデルは電気回路を理解するための，強固なモデルとなっている．

さて，マクダモットらは図 7(a), (b) の回路を被験者に示し，点灯した豆電球の明るさの順を答えさせる調査を行った[15]．(a) の順は $\mathrm{A} = \mathrm{D} = \mathrm{E} > \mathrm{B} = \mathrm{C}$，(b) は $\mathrm{E} > \mathrm{A} = \mathrm{B} > \mathrm{C} = \mathrm{D}$ であり，共に簡単な電気回路の知識で十分に解けるはずである．

マクダモットらが対象とした被験者は物理入門コースを終えた物理学科の学生（1000 人以上），小・中・高の先生 (200 人以上)，物理以外の理工系学生（100 人以上），理系の大学院生（55 人程度）であり，大規模な調査であった．驚いたことに，初めの 3 つのグループの正答率はすべて 15%，大学院生は 70%であった．この結果に対してレディッシュらは次のようにコメントしている．

「…わからなかった学生に聞いてみると，彼らが電気回路をどのように考えるのか，という本質的な問題が浮かび上がってきた．多くの者が言うには電流は (B) で使い果たされてしまうので，(C) は僅かにしか光らないというのだ（図 7(a)）．また，彼らの話に出てくる「電圧」,「電流」,「電力」はそれぞれが交換可能であり，電池は回路に関係なく，定電流源なのである．コース終了後のこのような深刻な事態は，彼らが受けた授業の担当者の力量や，学生の個人的背景，そしてその学生が電気回路に関して伝統的な実験をこなしてきたか否かに関わりなく生じているものであった」[16]．

彼らは通常の電気回路の問題（教えられた通りの問題）であれば，普通に解ける学生たちである．しかし公式を用いた計算ではなく，順位付けという問題になったとたん，頭の中から電気回路の法則はどこかへふっ飛んでしまい，素朴電流–水流モデルが考察の指針となってしまうようだ．伝統的授業により学習した物理法則は，それが教科書で与えられたのと同じ状況を設定してやらなければ活用が難しい．レディッシュはこれを学習の状況依存性と呼んでいる[17]．

さて図 6(a) であるが，ここで生徒に学んでほしい事柄は，並列接続ではそれぞれを流れる電流の和は枝分かれする前の電流値になる，という 1 点だけである．そのために分岐した川の流れを図解した．それはよい．しかし生徒はこのビジュアルなモデルから，貯水池から流れ出る川が分岐している状況を思い浮かべ，図 7(a) の (D), (E) に当てはめる．分岐するのだから，(D), (E) の水量が (A) の半分になるのは当り前ではないか．また，図 7(a) の (B), (C) では，川は上流ほど流れの勢いがあるだろうということで，電池の＋極に近いほど豆電球は明るいと想像する．図 6 を与えた教師の全く意図していなかった事態が生じているのである．

釘を格子状に打ち付けた板を斜めに置き，ビー玉を転がす演示実験や図解も存在する．こうした抵抗モデルが水流モデルと結びつくと，さらに思わぬ誤概念が生じる．電子は格子振動により運動が妨害されるので，抵抗の大きな場所では電子の速度は減ると思い込む．また，ビー玉が転がっていないときでも，釘を打ち付けた板はあいかわらず斜めに立て掛けたままである．すると，電流が0でも電位差が存在することになる．教科書と同じ問題設定であれば $V = IR$ より，$I = 0$ で $V = 0$ と推論することは難しくはない．しかし教科書の状況設定を離れたとたん，素朴アナロジーが不死鳥のごとく復活する．さんざんオームの法則を学習した後で，スイッチを切った状態での抵抗の両端の電位を聞いたとき，そのわからなさに唖然とした経験を持つ教員は少なくないのではないだろうか．

多くの教員が経験する，電流を巡る生徒の誤概念には次のようなものがある．

① 電流は豆電球で消費される．
② 電池は定電流源である．
③ 導線中の伝導電子は水分子が押し合うように押し合い，圧力を及ぼし合っている．
④（平野を流れる川，水平な水道管，あるいは③から）電位差がなくても電流が流れる．
⑤ 断線して電流が流れなくなったとき，そこに電位差はない．
⑥ 電流の流れる導線中の電場は常に 0 である．

⑥は静電気で学習したガウスの法則が祟っているので少しレベルが異なるが，こうした思いこみが水流モデルによるビジュアルな図解と密接な関連にあることは明らかであろう．電流–水流モデルのようにそのアナロジーがビジュアルであるほど，生徒の頭の中でそこから勝手な連想が増殖する．これはレディッシュが構成主義原則と呼ぶものである[17]．生徒一人一人の頭の中で学習がどう構成されていくのか，それを教員がコントロールすることは非常に難しい．

それでは図 6 のような「わかりやすい図解」を捨てて中・高生に電流電圧を学ばせることができるのだろうか…．そこに物理教育の課題がある．

6. ビジュアルなイメージそのものが物理入門の教材となる[18]

現行学習指導要領になって教科書のカラー化が小中高共にいっそう進んだ．以前は教科書の初めに口絵として数ページのカラーページがまとまっていたが，全ページがカラー化したためにその必要がなくなった．

カラー化がビジュアルな図解を引き立たすことは言うまでもない．構造や機能を表現する説明図であれば，より多くの情報を盛り込むことができる．しかし図 6 の川の流れをいかに多くの色を使ってリアルに表現しても，その効果も問題点も従来と変わるものではない．スペースシャトルや国際宇宙ステーションなどのカラー画像もミリカンの戦略を量的に拡大させただけのものとも言える．しかし，画像イメージに対してこれまでなかった立場を取るものが現れた．それがイメージそのものを物理入門の教材としてしまった教科書，英国物理学会（IoP）による A レベル物理入門コース『アドバンシング物理 AS』[19]である．

アドバンシング物理で最初に出会う章が「イメージング」である．本を開くと，お母さんのお腹の中にいる赤ちゃんの超音波画像が目に飛び込んでくる．そこから，超音波画像が作られる原理，宇宙からの画像，原子を「見る」，画像情報の処理，レンズの働き，等々の単元へと続く．

超音波によって描かれた赤ちゃんの画像，この画像の中に実際に物理の現場で何が行われているかが凝縮されている．イメージ（画像）は単に情報をわかりやすくさせるためだけの工夫ではない．コース製作者によれば，物理が自然から知り得る知識はほとんどイメージとして表現できる[20]．磁場や電場，固体内原子の配列などはその典型的な例である．イメージは，コンピュータ内に蓄積されている，自然から得られた情報構造そのものであり，情報の処理とは，そのイメージを変形する操作に他ならない．生徒が物理を公式や方程式の集合体として捉えてしまうことは，是非とも避けなければならない．イメージとその操作を最初の章に持ってきたのは，物理は自然から得る知識とその処理から始まるという，科学の基本的性格を，公式よりも先に，実習を通して学ばせるという考え方からである[20]．

画像はたくさんのマス（ピクセル）の中に明暗と色の情報を書き込み，それを縦横に配列したものだ．生徒はその隣り合うピクセル内の情報に対して様々な演算を施すことにより，ある像の境界を滑らかにしたり，境界を見出したり，あるいはノイズを取り除いたりといった操作を体験する．面白いのは，こうした画像処理は物理の演算そのものに通じている点である．

図 8 は像の境界を見つける処理の手法を示している．東西南北の向きに隣接する各ピクセルの値

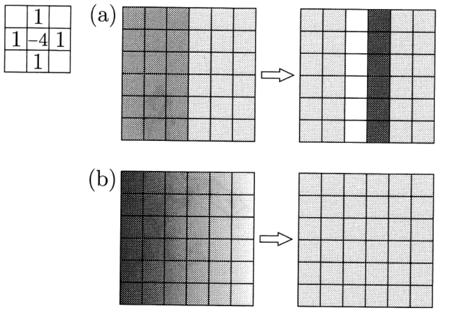


図 8　図の境界を見出す処理．(a) 境界がある場合，(b) 境界がない場合（文献 19) をもとに改変して作成)．

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\Delta_x f = f_{(i+1,j)} - f_{(i,j)}$$
$$\Delta_y f = f_{(i,j+1)} - f_{(i,j)}$$

$$\begin{aligned}\Delta_x^2 f &= \Delta_x f_{(i+1,j)} - \Delta_x f_{(i,j)} \\ &= [f_{(i+1,j)} - f_{(i,j)}] - [f_{(i,j)} - f_{(i-1,j)}] \\ &= f_{(i+1,j)} + f_{(i-1,j)} - 2f_{(i,j)}\end{aligned}$$
$$\Delta_y^2 f = f_{(i,j+1)} + f_{(i,j-1)} - 2f_{(i,j)}$$

$$\Delta_x^2 f + \Delta_y^2 f = f_{(i+1,j)} + f_{(i-1,j)} + f_{(i,j+1)} + f_{(i,j-1)} - 4f_{(i,j)}$$

図 9　ラプラスの演算子．

を合計し，そこから該当するピクセルの値を 4 倍したものを引算する．これを改めて該当するピクセルに代入する．この操作を順にすべてのピクセルについて実行する．図 9 にあるように，これは各ピクセルに対してラプラスの演算子 ∇^2 を施すことと同等である．

各ピクセルの明暗の度合いを数値で表したものを f とすれば，∇f は明暗の勾配，$\nabla^2 f$ はその変化率である．像にはっきりとした境界がない，一様なグラデーションがかかったような状態であれば，∇f はほぼ一定なので，$\nabla^2 f$ は 0 になる．しかし少しでも境界があれば，∇f に飛びが生じ，$\nabla^2 f$ はその境界付近で大きな値を取る．こうしてかすかな画像からはっきりとした形を読み取ることが可能となる．f を電位ポテンシャルに対応させれば，∇f は電場，$\nabla^2 f$ はガウスの法則により，電荷に対応する．したがってこのときの画像処理は，与えられた電位から電荷の空間分布を計算する手続きと同等である．生徒は知らぬ間に場の演算を行っていたことになる．『アドバンシング物理 AS』には新しい物理入門の形がある．

参考文献

1) Charles H. Holbrow, "Archaeology of a Bookstack: Some Major Introductory Physics Texts of the Last 150 Years", *Physics Today*, March, 1999.
2) E.Atkinson, "Elementary Treatise on Physics, Experimental and Applied, for the Use of Colleges and Schools", fourteenth edition, Longmans, 1893.
3) Steven Shapin, Simon Schaffer, "Leviathan and the Air-pump", Princeton university Press, 1985.
4) Melba Phillips, "Early history of physics laboratories for students at the college level ", *Am. J. Phys.* **49**, 522 (1981).
5) Sidney Rosen, "A History of the Physics Laboratory in the American Public High School (to 1910)", *Am. J. Phys.* **22**, 194 (1954).
6) William Thomson & Peter Guthrie Tait, "Principles of Mechanics and Dynamics", Dover Phoenix Editions, 2003.
7) Andrew Warwick, "Masters of Theory", The University of Chicago Press, 2003.
8) P.M. Harman, "The Natural Philosophy of James Clerk Maxwell", Cambridge Univ. Press, 1998.
9) Edited by David Kaiser, "Pedagogy and the Practice of Science", MIT Press, 2005.
10) Robert A. Millikan, "The Autobiography of Robert A. Millikan", Prentice-Hall, Inc., 1950.
11) Alfred Romer, "Robert A. Millikan, physics teacher", *Phys. Teach.* **16**, 78 (1978).
12) R.A. Millikan, H.G. Gale, "A First Course in Physics", Ginn and Company, 1906.
13) R.A. Millikan, H.G. Gale, "Practical Physics", Ginn and Company, 1920.
14) 『新編 新しい科学 1 分野　上』，東京書籍，平成 14 年度．
15) L.C. McDermott, "Oersted Medal Lecture 2001: Physics Education Research—The Key to Student Learning", *Am. J. Phys.* **69**, 1127 (2001).
16) M.C. Wittmann, R.N. Steinberg, E.F. Redish, "Investigating student understanding of quantum physics: Spontaneous models of conductivity", *Am. J. Phys.* **70**, 218 (2002).
17) E.F. Redish, "Teaching Physics", John Wiley & Sons, Inc., 2003.
18) 笠潤平，右近修治，「ICPE 国際会議報告ワークショップ，物理カリキュラムの改革：ジョン・オグボーン他」，物理教育，56(1), 2008 年．
19) J. オグボーン，ホワイトハウス編，笠耐，西川恭治，覧具博義監訳『アドバンシング物理 AS』，シュプリンガー・ジャパン，2004 年．
20) "Advancing Physics AS: Teacher's Single User" (CD-ROM), Institute of Physics, 2000.

（うこん・しゅうじ，横浜桜陽高等学校）

可視化する物理

これがゲーム制作ソフトの威力なのか？

鈴木　久男

■　1. はじめに　■

ここでは，数式のない物理の話をしていくわけだが，最初「動画を用いた教育について」という原稿を頼まれたときには違和感があった．反応は読者が思うことと同じである．「えっ！ 数理科学で数式なしって一体…」というものである．私は素粒子理論の研究者であるので，過去に何回か本誌に記事を書いたことがある．記事のタイトルは「双対性の衝撃—素粒子理論最前線に何が起こったか？」（98 年 2 月号，2007 年 4 月号別冊），「超弦理論のアノマリーとその相殺のメカニズム」（2005 年 7 月号）や，「超弦理論の厳密解を予言した超対称ゲージ理論の厳密計算」（2006 年 3 月号）などのように，数学と物理学の最先端が共存する領域についてである．これは，私の主な研究分野が，超弦理論など数学に近いところにあることに起因している．実際に私の書く論文は数式のオンパレードであることが多い．にも関わらず，今回は今までと 180 度異なり，動画で数式なしに物理を理解することが主題である．もちろん，私がこの記事を書くのにはそれなりに理由がある．私の所属する北大では，「最良の専門家による最良の非専門家教育」を合言葉にしている．例えば仏教では，役に立つといった視点から超越した出家の仏教と，俗世の迷いを取り除くための在家の仏教がある．物理を仏教になぞらえれば，専門家向けの理論の根本を追求する物理は出家の仏教であり，一般向けの物理は俗世の仏教と言うところだろうと思う．つまり，内容，教え方共に，非専門家向けの物理は，専門家向けの物理とは別のほうがいいのである．それは，そもそも物理を学ぶ目的の違いが原因である．目標によって，教え方を変えていくのは当然だ．もともと私の本職は物理の研究であるので，数式を用いた物理専門課程のコースを教えるのは慣れているのだが，専門としない人たちへの教え方はわからなかった．こうしたことは自分で考えて研究するよりも調べたほうが速いので調べてみると，驚くことに教授法も物理の研究と同様日々進歩してきていたのだった．しかも，意外なことに物理の教育研究は，他分野に比べて進んでいるのだった．これは，物理がわからない人が多いというのは万国共通の悩みであり，深刻に考える人の人口も多いためである．物理の教育研究はアメリカなどで顕著であり，今でも新しい教育法などが開発され，他分野に応用されていっていることも多い．そこで，私の教育研究と言っても，ただ海外で行われている研究を集めて，自分の授業で楽に使えそうなものをそのまま使うか，その原理を応用していく程度である．このため，私が物理教育を研究すると言っても，あまり偉そうなことは言えないのだ．それでも，海外の教育研究理論を日本で実現するための独自の取組みをした．この教育理論の一つが「可視化」であって，私たちが行った取組みの一つが「コンピュータグラフィックスの動画による可視化」なのである．そして一部の動画は『動画だからわかる物理』[1] という本に収録されている．また，熱，電磁気，相対性理論などについては，2008 年度から放送大学の「初歩からの物理学—物理へようこそ—」（生井澤寛，鈴木久男）の中でも放映されている．今回は，この可視化が物理理解にどのように有効なのかについてみて，動画の威力について解説していくつもりである．元々可視化は非専門系向けにと思っていたが，意外にも可視化は物理を専門とする学生たちにも重要であることもわかっていくだろう．

2. 物理で陥りやすい間違いとは？

2.1 公式中心の物理とその限界

そもそも物理とは何であろうか？ もちろんそれは，自然界の根本的な原理を追求する学問である．しかもその法則を記憶でなく，理解する必要がある．そして，物理理解の仕方には，大きく分けて3つのレベルがある．第1のレベルは，定性的な理解である．これは，例えば力が働いたときに大まかにどのようになるのかを予測する能力に相当する．温度が上がると圧力がどうなるかなどもこうしたレベルだ．ただし，これは現象の記憶ではなく，熱の概念を分子レベルで正しく捉えることも含む．第2のレベルは，定量的な理解である．ここでは，公式などを正しく運用して，運動を数値的に正確に予測できるようになる．そして第3には抽象的な理解である．数値的にではなく適切な複数の公式を正しく操作して結果を導くものである．例えば，力の形を指定したとき，質点のエネルギー保存則を，運動方程式から証明するといったものである．通常，第3のレベルができればその下のレベルまでマスターしているものと考えていた．

さて，私たち大学の教員が，大学初年度の学生を対象に教えると，多くの学生が物理というものを正しく理解していないことに気づく．高校で教わった公式の運用はできるが，その意味を正しく理解できていないことが多いのである．これはなぜだろうか？ 実は，こうした現象はアメリカでも20年ほど前から問題視されてきたことである．例えば，物理のコースを受講するとニュートンの運動の法則を覚え，運動方程式の運用やエネルギーの運用が正しくできるようになる．にも関わらず，トラックと軽自動車が正面衝突したときにどちらの押す力が強いかなどと聞かれると，即座にトラックと答えてしまう．作用反作用の法則を現実世界では信用していない．また，空気抵抗があるから軽いものが遅く落ちると言われても，それを心の底から信じていない学生もいる．つまり，物理の数式を日常と切り離して，試験対策の枠でしか理解していないことが多いのである．これは，ある意味もっともなことである．そもそも，高校の教育は，典型的な例題に対して，適切な公式を選び出して運用することに重点が置かれる．これは，もちろん大学受験対策のためである．物理問題を解くには，受験生は，適切な公式や公式の組合せ方を探す，公式ハンターとならなければならない．数学の微分や積分の公式を用いて，数学の問題を解くのと同じなのである．頻出問題と言われるタイプの問題では，イメージがなくても適切な公式と解法の暗記によって問題を解くことができる．この現象は，多くの人間にとって当然の反応である．つまり，基本的に理解するというのは通常少し考えたりして時間がかかる．そのため，公式と解法を覚えてしまったほうが時間の節約になるのである．例えば気体分子運動論の問題における，平均運動エネルギーと圧力，体積などの関係の導出などは，試験対策としてその各ステップを覚えておいたほうがいい．しかし，一方で公式以前の最も簡単なはずの定性的な問題は解けないのである．これは，生活レベルで物理が活用できない，あるいは根本的に机上の空論と思っていることを意味している．極言すれば，物理を数学の一種と思い，現実と関係のない理想的な場合のみ成り立つと思っている学生も少なくないのである．多くの学生にとって，物理と数学とは類義語である．

他方，私たちの日常生活は複雑である．そのため単純な物理の公式をそのまま使う場面はほとんどない．例えば，物理の法則が簡単に使えるからと，ボールをビルの上から落として，2秒後にどこまで落ちるかなどと都会で考える人は，かなり危ない人だ．ボールを投げるにしても，通常空気抵抗があるので解析的には軌道はわからないし，投げる初速度を計るにはそれなりの設備がいる．ほとんどの現象は様々な要因から起こって複雑であるので，数値的に結果を求めることは困難である．このため，日常では学生の公式ハンターとしての腕前は全くと言っていいほど必要ないのである．逆に必要なのは，ある運動を見たときどのような力が働くのか推測するか，ある力の下でどのような運動をするのかを定性的に考え，結果をイメージできるかどうかである．実は物理の研究においても，こうした何が起こっているのかをイメージで見分ける能力が必要なことが多いのである．つまり，詳しい計算をしなくても結果を予測する能力が重要なのである．公式中心の物理では，結果を予想する能力が育たない．したがって，この定性的に理解できる能力は，将来物理を専門とするかしないかに関わらず有用と言える．

2.2 あなたは数式でないと理解できないか？

次の問題は外国では古くからある問題のようだが，計算では困難なのであなたの物理的な力が試される．

問題：軽いボールを手の上から真上に投げる．重力だけでなく空気抵抗の力を受けてボールは運動する．

ボールが手から最高点に達するまでの時間と，最高点から元の高さまで戻ってくるまでの時間とではどちらが長いか？

できただろうか？ ここでは問題の答えを書かないが，公式中心の人ほど絶望してしまう問題の一つだろう．かなり優秀な学生なら，「ちょっと待って下さい．今運動方程式を解いてみます.」などと言って，しばらくして答えを出すだろう．しかし，それよりは定性的に考えたほうが速いのである．

空気抵抗の力は進行方向と逆向きであることに注意する．すると上昇するときには，下向きの重力に加えて，やはり下向きの空気抵抗が加わる．そこで力が強くなり，ニュートンの第2法則より，下向き加速度が大きい，つまり速度の減少が速くなる．これは，空気抵抗がないときより，素早く速度がゼロになることを意味している．一方落下するときには，重力と逆向きに空気抵抗の力が起こる．そこで，やはりニュートンの法則より加速度は小さくなり，重力だけのときより速度の増加が遅い．よって空気抵抗がないときより落下が遅いのである．そこで，最高点から元の高さまで戻ってくる時間のほうが長いというわけだ．日常で起こっていることは，物理の公式を利用するよりも定性的な理解のほうが役立つ例だ．ただし，こうした定性的な理解は，公式への代入以上に困難なことも多い．例えば，大学院生の研究発表では，聞いている人が「それはどうして起こるんですか？」と質問すると，「計算するとこうなります.」という答え方しかできない学生もいる．「この公式により」などと説明することもある．もちろんそれでは物理現象を説明した発表ではない．ここでどういった効果で起こるといった定性的な説明ができなければ，物理現象を理解したとは言えないのである．このように，定性的に理解することは重要ではあるが，公式運用以上に困難なことが多いのである．

■ 3. 物理において見ることの重要性とは？ ■

3.1 見ることによる記憶力アップ効果は？

物理を理解するという行為は，人間のなす行為であるので，学習者の心理学的，学習理論的考察が欠かせなくなってくる．老子が言った言葉に「聞いたことは忘れる．見たことは覚える．やったことはわかる.」とあるようだ．しかし，現代のように高度に映像が満ちあふれている中にあっては，見たことがそのまま覚えることになるとは限らない．例えば，アクション映画を見ても，1カ月ほど立つとストーリーは忘れて派手な爆発シーンしか覚えていないことは経験がないだろうか？ 原典はどこかは知らないが，アメリカのある研究者によると，記憶に残る率は，聞いたことは 10%，見たことは 15%，聞いてみたときには 20%，体験したときには 80%，そして，発見したときは 100% のようである．

さてこの数字から読み取られることとはどのようなものであろうか？ まず，第一にすべての人に有効な教授法はないということである．人間には得手不得手が必ずある．レオナルド・ダ・ヴィンチのような人は希なのである．したがって，学習者から見るとどうしたら理解しやすいか，あるいは覚えやすいかには個人差がある．しかし，統計的には見た場合のほうが，ただ読んだり聞いたりするより覚える率が増加する．

3.2 物理において見ることと理解すること

それでは，物理において視覚の利用は，覚える率が多少増加するという目的だけのものであろうか？ それは違う．先のデータで，「発見したときは 100%」であることに注目しよう．物理現象を自分なりに理解したときそれは，自分の中で新しい発見である．「あっ，そうか！ わかった！」というのがそれである．そもそも物理では，物体に働く力とそれに伴う運動を主に扱う．こうしたことから，可視化により，新しい物事に対して，どういった現象が起こるのか，またその現象が力の観点からどう理解できるかどうかの判断が可能となる．つまり，多くの物理現象の理解にはイメージがついて回るのである．理解するというのは運動が視覚化されているのを含む．そのため，視覚化というのは理解を助けるというよりも理解に必須なことが多い．例えば，気体は分子レベルでは分子どうしが衝突しながら乱雑に動き回っているというのを視覚的に把握しておくことは，熱の現象の理解そのものに必須なのである．また，こうしたことは物理だけに限らない．例えば，力と熱の観点が，分子レベルで正しく理解できていれば，生物などでリン脂質が細胞膜を作っていく様子なども感覚的に理解していくことが可能である．また，塩を氷に撒くと氷がなぜ溶けるのかも，分子レベルの熱運動で感覚的に捉えることもできるようになる．このように，物理の理解にはその現象を視覚的にイメージできることが，自然現象を理解する上で重要なのである．そしてもしあなたが研究者であれば，そ

うした予想を元に，次にその予想を正確に数式で表現していくだけのことである．

4. MIT による可視化による物理

可視化による物理の理解を大きく取り入れたのは MIT（マサチューセッツ工科大学）である．MIT の物理，特に電磁気の分野の教育において可視化を取り入れた教育がなされている．関連する日本語のサイト[2)]では，東京大学大学院の公開セミナーで概要を見ることができる．また，実際の可視化については，サイト[3)]で見ることができる．MIT で行われている教育プログラムは TEAL（Technology Enabled Active Learning）と言う．日本語では，「科学技術を駆使した能動的学習」と言うのだろう．能動的学習というのは，学生が能動的に授業に参加していく形態の学習方法であり，アメリカでは，大学初年度物理教育での主要教育形態となってきたが，今回の主題から外れるので詳しくは述べないでおこう．

MIT での TEAL 導入の動機は，学生が物理現象にどのような意味があるのか理解できない，抽象的な数式を理解できない，また物理現象や概念の可視化が困難であるといったことである．TEAL の目標の一つに，可視化能力の増強があり，可視化をいかに重要視しているかを物語っている．そもそも，数式というのは物理現象の表現であって物理の出発点ではない．まずは，その現象が可視化でき，それを正確に数式で表現することが重要となる．コンピュータグラフィックスを用いて，電場や電気力線など実際には目に見えない概念も，イメージで捉えることを求めている．実はこうしたイメージを少し極めると，電磁波に縦波がないこともイメージでわかるようになる．もちろん，量子論などのように可視化では表現できないものも多い．しかし，正確ではないにしてもそのイメージをつかんでおくことは結果を予想する能力を助けることになる．また，物理を専門としない学生の場合には，数式での表現も必要かわからないので，数式の変形よりも，可視化能力を磨いたほうが化学や生物分野への応用などで役に立つことも多い．

5. これが新兵器の威力なのか！ と言いたいところだが…

以下に動画による説明と静止画による説明の違いを見ていこう．北大でも独自に動画を制作し，授業にも用いているのだ．ここでは制作に用いた 3ds-max や After Effects という CG ソフトの威力を見たいところだ．ゲームや SF 映画の制作にも使われているソフトなので，単純な物理の説明には本来もったいないくらいのソフトなのだ．動画の具体的製作法を知りたい方は文献 5) を参照してほしい．ただ，あらかじめ断っておくが，当然のことながらこの紙面の絵は動かない．聞くところによると，ホグワーツ魔法魔術学校[4)]でなら可能だそうだが，肝心のこの紙面では無理のようだ．また，小学校のときの教科書にいたずらして，なぜか先生にえらく怒られたときのように，各ページにアニメーションを入れてパラパラ漫画にしていくのも手だが，これはまた出版社が心底いやがる．そのため，ここで動画の優位性を正確に伝えるのは困難である．ゲーム開発ソフト 3ds-max では，非常に凝った映像を作ることができ，「すごい！」と思うことが多く，それをここで再現できないのはくやしいのだが，読者には，想像力を最大限に働かせて，イメージを作ってみてほしい．これではタイトルに偽りありと読者に怒られそうだが，ここでは静止画でイメージすることの難しさを体験していただければ本稿の目標達成なのだ．なお，『動画だからわかる物理』の付属 DVD-ROM では pdf ファイル内の図がクリックすると動き出すようになっているので本当に見たい人は参照してほしい．また，放送大学のコース「初歩からの物理学—物理へようこそ—」（2008 年現在）でも，私が担当している回では，動画による説明を放映している．

5.1 波の波長と振動数の関係

まず，次の図 1 を見てみよう．2 つの波があり，右に向かって同じスピードで移動している．ボールが波の上にあり，上下に振動している．さて波の周波数はどちらが大きいだろうか？ 通常は，同じスピードなら

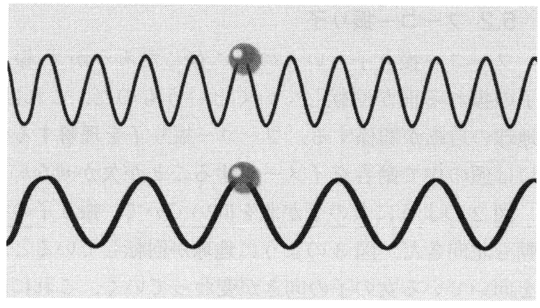


図 1　波長が異なる波が右に同じ速さで移動していく．

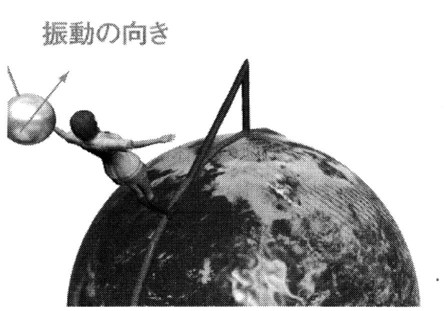


図２　地球の上で女の子は北向きで振動も北向き．

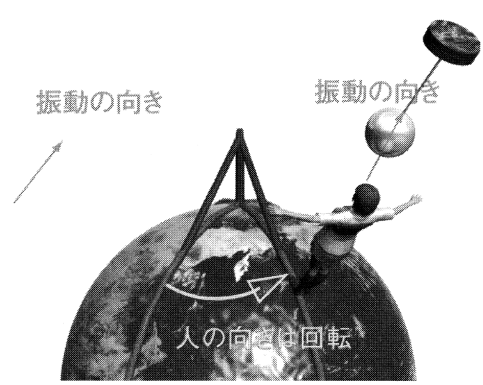


図３　地球の上で女の子は北向きで振動は以前の方向で北向きから外れる．

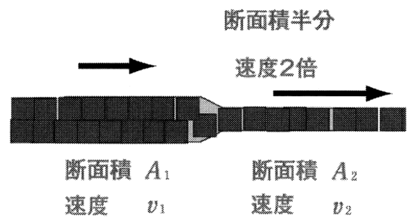


図４　ベルトコンベアで右側に箱が流れてくる．

$v = f\lambda$ だから，波長と周波数は反比例してなどと言う人が多い．それではなぜ $v = f\lambda$ なのか聞くと，説明できなくなるか，思い出すのにしばし時間がかかる．結果だけ覚えているというパターンだ．往々にして公式という権威をかさに着て話しているのと一緒だ．これでは，物理を理解しているとは到底言えない．

それでは，次にこの波が右に同じスピードで動いているのを想像してみよう．多少時間がかかる場合があるが挑戦してみよう．波長が長いほうが，縦にはゆったりと振動するのがイメージできただろうか？ 波長が短いとせわしなく縦に振動する様子が目に浮かんだら成功だ．また，図１のボールを，横方向には一定の速度で，波打ちながら左に移動させても実は同じ効果である．これは波と同じ速さで移動している人から見る光景になるのだ．今は，動画を使わなかったので，イメージを作るのが大変だった人が多いだろう．このような頭の中で波が移動していくイメージがあれば，振動数と波長が反比例するのを理解するのはたやすいことがわかる．そして，動画でその動きを実現するのは，そうしたイメージを素早く作るのを助けるわけである．

この例は高校で学ぶことだが，以下では大学１年次で学ぶ題材を例にとってみよう．

5.2 フーコー振り子

フーコー振り子というのをご存じだろうか？ 振り子の振れる面が回転していくというものだ．これは，地球の自転が関係する．フーコー振り子を理解するのには頭の中で動きをイメージすることが欠かせない．

図２のように女の子が北を向いていて，振り子の振動も北向きだ．図３のように地球が回転していると北を向いている女の子の向きが変わっていく．これに対して，振り子の振動の向きが変わらないので，振り子の振動が回転しているように見えるわけだ．このように，物理の動的な現象を静止画による説明では，読み手に正確な動的なイメージを持たせるには，静止画と共に正確な記述の文章が必要となる．しかし，やはり動いているものは，実際に動いているものを見れば結果がたちどころにわかるのである．

5.3 流れの保存

流体の性質を知ることは，工業的にも医療の現場でも重要である．ところで水の流れは，断面積の小さいところで速くなる．これは流れの保存から導かれるとするのだが，数式のみで説明されてもわかった気がしない．図４では，ベルトコンベアにボックスが乗って右側に流れていっている．狭くなると１つずつ通らなければならないので，後がつかえないためには速くならないといけない．イメージできただろうか？ これが流れの保存であり，水などでも，箱に変わって，小さな水分子であるだけなので，狭いところで速くなるのは同様なのである．これも箱が実際動いている動画で見ればたちどころにわかる．

また，流れが速いところでは圧力が低下する．これはベルヌーイの法則により…と言われても，やはりわ

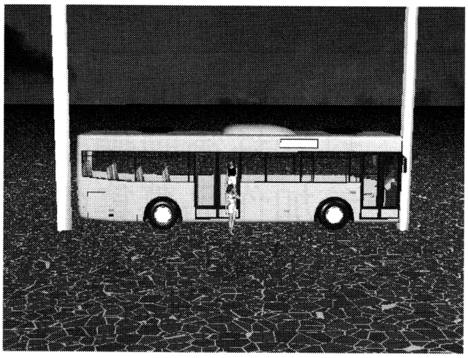


図５　バスの前後に雷が落ちる．

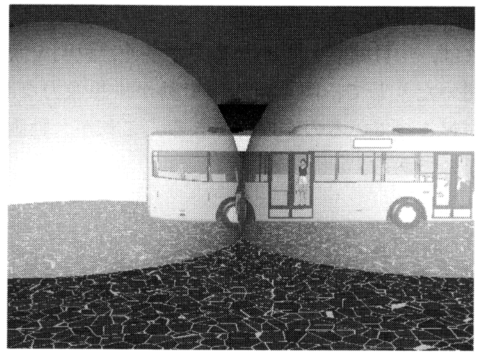


図７　バスの外の人に同時に雷が見える．

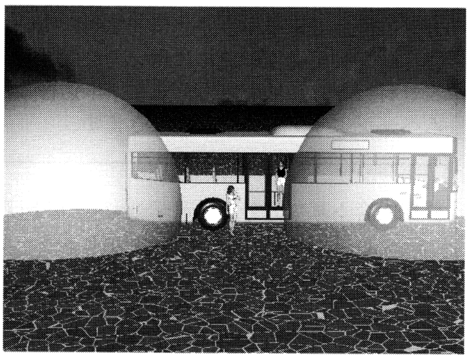


図６　バスの中の人に先頭の雷が見える．

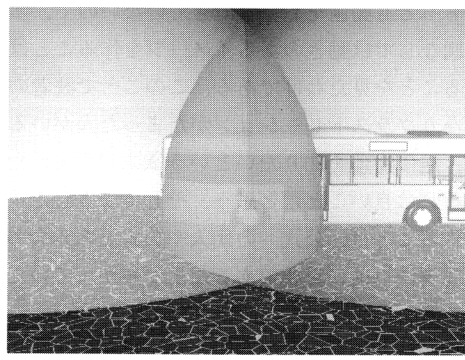


図８　バスの中の人に後方の雷が見える．

かった気がしない．わからないものをわからないもので説明される感じだ．これもニュートンの運動の法則と動画で簡単に理解することができるのだがここでは省略する．

5.4 相対論的時間の遅れ

さて，相対性理論も大学では興味がある人が多いのだが，難解な話題の一つだ．それでも相対性理論，特に特殊相対性理論はすでに100年以上の前の理論であり，世界的に教授法が進歩した．そのため海外では大学の物理学コースで学ぶのが標準だが，日本ではまだまだ定着していないのは残念だ．

さて，相対性理論も動きが読めないと全くわからないことが多い．それでは，定番の同時性の破れの説明をしていこう．図５のようにバスの中心に人が乗っていて，外部の人とすれ違った瞬間に，バスの前後に同時に雷が落ちる．図が４つあるので上から順に見て，イメージを作っていこう．

もちろんこれはバスを光速に近いくらい非常に速く走るようにし，スローモーションで再現している．現実にはバスの内外の人に見える時刻の違いなど一瞬の違いである．静止画ではこのように頭の中で静止画をつなぎ合わせてイメージを作る必要がある．

さて，これをバスと同じスピードで移動するカメラから見るとどうなるのかが相対性理論のメインイベントの一つだ．さてどうなるのか見てみよう．しかし，誠に残念ながら紙面がなくなってしまったので，ここで断腸の思いで打ち切らざるを得ない．せっかくイメージを作って損したと読者のクレームが聞こえてきそうだが，イメージを作ることに時間がかかることはわかってもらえたはずだ．さてこの後どうなるのか興味がある人は相対性理論の本を参照してみよう．もちろん動画の説明ならあっという間に答えがわかる．この動画は放送大学の「初歩の物理」で放映中なので，見ることのできる人は見てほしい．

相対性理論では後，時間の遅れ，長さの短縮，光速を超えられないことなど，動画で説明するとわかりやすくなるのだ．

5.5 動画なしにイメージを作る欠点

以上の例でわかっていただけたのが，まず動画なしに動いているイメージを作ることは困難ではないが，時間がかかるということである．また，最初はどうしたイメージを作ればいいのかすらわからない場合もあ

る．こうしたとき，動画が役に立つのである．動画を見れば，一目瞭然と言った場合が多く，説明を読んだり聞いたりして，図を頭の中で動かす想像力なしに，何が起こっているのか理解できる．これが，動画の威力なのである．

6. まとめ

ここでは，物理において可視化が自然現象の活きた理解としていかに重要かを見てきた．こうした可視化には動画による物理現象の説明が有効であることを見た．もっとも動画をお見せできていないので，ここでは動画なしでは動きのあるイメージを作ることは面倒であることを見たわけである．このことで読者の中にはかなりフラストレーションがたまった人がいると思うが，逆に物理を知りたいという欲求が生まれたとしたらそれは良いことだと思う．そしてこうしたイメージを作ることは，公式への代入や公式を組み合わせての問題解法以前に重要であることがわかっていただけただろうか？

動画は動きのあるイメージを作るのを助け，動画は有効な教育素材だと思う．しかし，方法と目的とを混同してはいけない．もちろん，一番大事なのは想像力であって，動画はその補助でしかない．動画は可視化能力を助けるが，最終的には動画なしでも物理現象をありありとイメージできることが重要となる．サイエンスは自然の真理であると同時に，人間の独創的な想像力によってもたらされた叡智なのである．

参考文献

1) 鈴木久男，山田邦雅，前田展希，徳永正晴著，『動画だからわかる物理 DVD-ROM 付 力学・波動編』丸善，2006 年；『動画だからわかる物理 DVD-ROM 付 熱力学・電磁気学編』丸善，2006 年．
2) BEAT セミナーレポート，http://beatiii.jp/seminar/008_02.html
3) http://mit.cmsh.cyc.edu.tw/
4) J.K. ローリング著，松岡佑子訳，『ハリー・ポッターと賢者の石』，静山社，1999 年．
5) 「動画入り物理教科書の制作」，鈴木久男，山田邦雅，前田展希，徳永正晴，高等教育ジャーナル—高等教育と生涯学習—第 **14** 号，83, http://socyo.high.hokudai.ac.jp/Journal/jo14.html

（すずき・ひさお，北海道大学大学院理学研究院）

図形的イメージを伴うベクトル解析入門

兵頭　俊夫・和田　健

1. はじめに

抽象的な内容を，あるいは逆に具体的な実体を表現する図形は物理の理解を助けたり，さらに発展させる手がかりを得たりするために有効である．特に，ベクトルの矢印表示や，ファインマン図形や，回路図や等価回路図のように，対象と緊密な1：1対応がつくものは，有用性が高い．しかし図形的イメージは両刃の剣である．対応関係があいまいな場合は，かえって誤解を生じ，深い理解の妨げになることがある．

本稿ではベクトル解析の入門的解説を行うが，ベクトル場の勾配，発散，回転などの基本概念を正しく示す図を描くのはほとんど不可能である．そこで，概念を直接表す図ではなく，式の本質を正確に理解するための補助となる図をなるべく多く示すことにした．基本概念はデカルト座標の成分を用いない定義で導入する．そのほうが，本質的なイメージを得やすい．この方法によると，ガウスの定理，ストークスの定理などを，発散や回転の定義と全く並行して理解できる．

2. ベクトル

2.1 ベクトルと矢印

物理学では，力など，大きさと向きをもつ量をベクトル量あるいは単にベクトルと呼ぶ[1]．これに対して，数値だけで表せる量をスカラーと言う．ベクトルは

$$\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{a},\quad \cdots \text{ あるいは } \vec{A},\quad \vec{a},\quad \cdots \tag{1}$$

のように，太文字や矢印のついた文字で表す．ここでは実空間のベクトルを考える．実空間のベクトルは矢印で表すことができる．矢印の長さで大きさを表し，矢印の向きでその向きを表す．

2.2 ベクトルの内積と外積

ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ は，$AB\cos\theta$ に等しいスカラーである（図1）．θ は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角である．$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の外積 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ は，大きさが $AB\sin\theta$ のベクトルであり，その向きは $\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{B}$ に右ネジを回したとき，ネジが進む向きである（図2）．

2.3 単位ベクトルと成分

任意の向きの大きさ1のベクトル $\boldsymbol{e}$ を，その向きの単位ベクトルと言う．ベクトル $\boldsymbol{A}$ の $\boldsymbol{e}$ 方向の成分（スカラー）は

$$A_e = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e} \tag{2}$$

である．

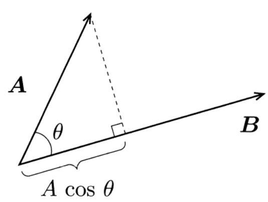


図1　内積 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = AB\cos\theta$.

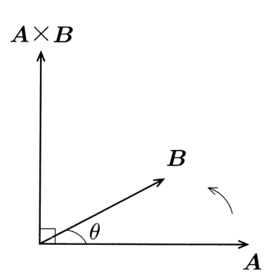


図2　外積 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$.

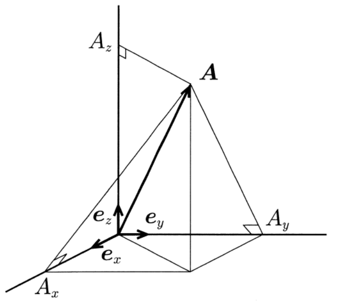


図 3　3 次元デカルト座標の単位ベクトルとベクトル $\boldsymbol{A}$ の成分.

図 3 のように 3 次元空間にデカルト座標を定め，単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ を用いると，$\boldsymbol{A}$ のそれぞれの向きの成分は

$$A_x = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_x,\ A_y = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_y,\ A_z = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_z \quad (3)$$

である．単位ベクトルと成分を用いると 1 次元〜3 次元のベクトルを

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x, \quad \boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y,\\ &\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z\end{aligned} \quad (4)$$

と表すことができる．

1 次元〜3 次元のベクトルはまた

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A} = (A_x), \quad \boldsymbol{A} = (A_x, A_y),\\ &\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z),\end{aligned} \quad (5)$$

のように，成分の組で表すこともできる．1 次元の場合，ベクトル，その大きさ，その成分の区別が紛らわしいので，注意を要する[2)]．

ところで，単位ベクトルの「単位」の意味は，大きさが 1 という意味である．質量や力などの物理量の単位は，質量や力などの次元の基準の量であるが，単位ベクトルは次元をもたない．従って，単位ベクトルには物理量の単位の意味の単位はつかない．あくまで大きさ 1 であり，長さが 1 m や 1 cm ではない．物理量としての次元をもっているのは大きさ A や成分 A_x 等なので，数値で表すときには，これらに物理量としての単位がつく．

2.4 微分

ベクトル場の微分演算を理解する基礎として，スカラー関数の微分を確認しておく．1 変数関数 $y = f(x)$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\end{aligned} \quad (6)$$

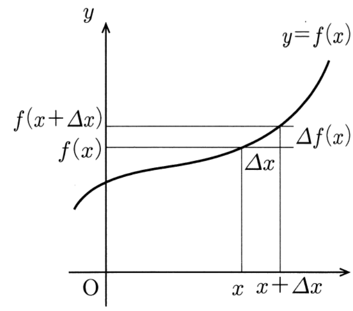


図 4　$y = f(x)$ の微分.

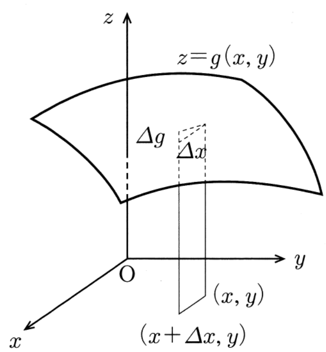


図 5　$z = g(x, y)$ の偏微分.

で定義される関数をその導関数と言う（図 4）．これは，曲線 $y = f(x)$ の $x = x$ における接線の傾きを表す関数である．$y = f(x)$ から導関数を求める操作を微分と言う．これを「x が Δx だけ変化したときの $f(x)$ の変化 $\Delta f(x)$ と，Δx の比」としてとらえることが重要である．

2 変数関数 $z = g(x, y)$ があるとき，

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x, y)-g(x,y)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left.\frac{\Delta g(x,y)}{\Delta x}\right|_{y=\mathrm{const}}.\end{aligned} \quad (7)$$

を，$g(x, y)$ の x に関する偏導関数と言う．他の変数（今の場合は y）の値を止めて 1 つの変数（今の場合は x）についてだけ微分し，その結果を再び 2 変数 (x, y) の関数とみなす．そのような微分計算を偏微分と言う（図 5）．3 変数以上の関数の場合も同様である．計算自体は，他の変数を止めておいて行うから，1 変数関数 $y = f(x)$ の常微分と全く同じようにできる．

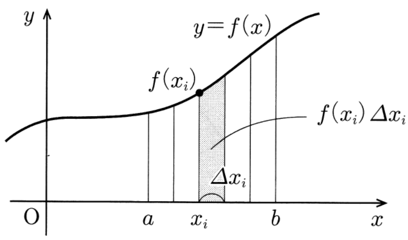


図 6　$y=f(x)$ の積分.

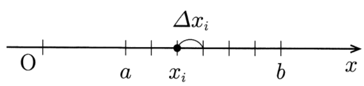


図 7　$\int_a^b dx = b-a$.

2.5 積分

ベクトル場の線積分や面積分を理解するためには，スカラー関数の定積分の意味についてよく理解しておく必要がある．関数 $f(x)$ の $x=a$ から $x=b$ までの定積分を $\int_a^b f(x)dx$ と書き，定義は

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \qquad (8)$$

である．ここで x_i は，$x=a$ から $x=b$ までの間を n 個に区分したときの i 番目の区間における x の値である（図 6）．微分は $\Delta f(x)$ と Δx の比であったが，積分は積（$f(x)\times\Delta x$）の和である．

$f(x)=1$ のときは

$$\int_a^b dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = b-a \qquad (9)$$

となる．これは x の区間 $[a,b]$ を n 個の区間に分けて，再び加え合わせることに意味するから，量 x を表す直線上の a から b までの部分の「長さ」を表す（図 7）．これを無理に「縦が 1 の長方形の面積」で考える意義はほとんどない．

3. ベクトル場

位置ベクトルの関数として表される物理量を場と言う．密度のようなスカラー量の場をスカラー場と言い，電場のようなベクトル量の場をベクトル場と言う．

ベクトル場を考える基本は流れの場である．川の流れ等をイメージすればよい．流れを表すベクトル場は，流束密度の場 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ である．点 $\boldsymbol{r}$ における流れの実体（例えば水）の密度が $\rho(\boldsymbol{r})$ であり，それが速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ で移動しているとき，流束密度の場は

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \qquad (10)$$

である[3)]．これは，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ と同じ向きで，大きさが $\rho(\boldsymbol{r})v(\boldsymbol{r})$ のベクトル場である（図 8）．

流れの場の中にある任意の向きを向いた面積 ΔS の微小な平面を考える．この平面を貫いて単位時間に流れる実体（例えば水）の量 $\Delta\Phi$ を流束と言う．ΔS に垂直な単位ベクトル（法線ベクトル）を $\boldsymbol{n}$ とし，$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{n}$ の間の角を θ とすると

$$\Delta\Phi = j(\boldsymbol{r})\Delta S\cos\theta = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}\Delta S \qquad (11)$$

である（図 9）．すなわち流束は，流束密度ベクトル $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ の法線成分に ΔS を乗じたものである．1 つの ΔS に対して $\boldsymbol{n}$ には裏と表の 2 つの向きがある．その指定の仕方によって，同じ $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ と ΔS に対しても，$\Delta\Phi$ は正にも負にもなる．$\boldsymbol{n}$ で指定された向きから測って 90° 以内の方向に流れが進んでいれば，流束は正である．有限の面 S を貫く流束 Φ は，S を微小な平面に分けてその一つ一つを貫く流束の和をとればよい．

$$\Phi = \lim_{n\to\infty}\sum_i \Delta\Phi = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})dS. \qquad (12)$$

面素ベクトル $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})dS$ を用いて，$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ と面

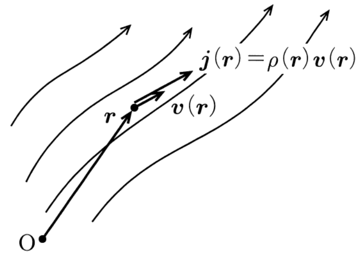


図 8　流束密度ベクトルの場.

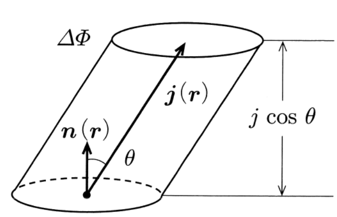


図 9　流束密度ベクトル $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ と微小面を貫く流束 $\Delta\Phi$.

素ベクトル $d\boldsymbol{S}$ の内積の和

$$\Phi = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{13}$$

の形に書くこともある．なお，今後，積分中の $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ は単に $\boldsymbol{n}$ と記す．

ところで，ベクトル場 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ は (10) で密度と速度の積で表されていたが，(11)～(13) の流束の計算には $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ しか使われていない．そこで，任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ を流れを表す場とみなすと，例えば，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ に関連する量の流束として，

$$\Delta\Phi = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}\Delta S, \tag{14}$$

$$\Phi = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n} dS \tag{15}$$

を考えることができる．$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が実際の流れを表す流束ベクトルでない場合は，$\Delta\Phi$ や Φ に単位時間あたりの流量という意味はない．

4. 勾配(grad)，発散(div)，回転(rot)

スカラー場 $\phi(\boldsymbol{r})$ の勾配 $\mathrm{grad}\phi(\boldsymbol{r})(= \nabla\phi(\boldsymbol{r}))$ や，ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の発散 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})(= \nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}))$ や回転 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})(= \nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}))$ は，デカルト座標表示を用いて次のように導入されることが多い．

$$\text{勾配：}\nabla\phi(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial x}, \frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial y}, \frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial z}\right), \tag{16}$$

$$\text{発散：}\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \tag{17}$$

$$\text{回転：}\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right). \tag{18}$$

しかしこれらの量は以下のように座標とは無関係に定義が可能であり[4]，そのほうがイメージしやすい．

4.1 勾配

スカラー場の勾配は，ベクトル場である．したがって各点で大きさと向きをもつ．様々な向きに沿って $\phi(\boldsymbol{r})$ の微分

$$\lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta\phi(\boldsymbol{r})}{\Delta s} = \frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial s} \tag{19}$$

を計算したときの最大値が $\nabla\phi(\boldsymbol{r})$ の大きさであり，最大値を与える向き，すなわち $\phi(\boldsymbol{r})$ の変化の割合が最大の向きがその向きである．あるいは，

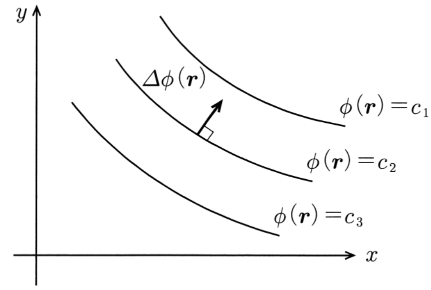


図 10　勾配 $\nabla\phi(\boldsymbol{r})$.

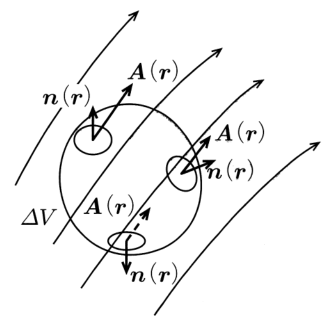


図 11　発散.

任意の向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{e}$ として，$\boldsymbol{e}$ 方向成分が

$$\nabla\phi(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{e} = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta\phi(\boldsymbol{r})}{\Delta s} = \frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial s} \tag{20}$$

で与えられるベクトルと言ってもよい．ここで，Δs は $\boldsymbol{e}$ 方向の微小変位であり，$\Delta\phi(\boldsymbol{r})$ はその変位に対応する $\phi(\boldsymbol{r})$ の変化である．$\phi(\boldsymbol{r}) = c$(定数) で定まる面（2 次元では曲線）は，$\phi(\boldsymbol{r})$ の等値面（2 次元では等高線）であり，$\nabla\phi(\boldsymbol{r})$ はその等値面（等高線）に垂直な向きである（図 10)．

4.2 発散

ベクトル場の発散はスカラー場で，面積分の“体積微分”

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \equiv \lim_{\Delta V\to 0} \frac{\oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS}{\Delta V} \tag{21}$$

である（図 11)．ΔV は点 $\boldsymbol{r}$ の周りの微小体積で，S はその ΔV の表面全体（閉曲面）である．本稿では，閉曲面や閉曲線の上での積分を記号 $\oint$ で表す．$\boldsymbol{n}$ と略記されている $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ は S 上の外向きの法線ベクトルで，表面の各部分で向きが異なる．すなわち $\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は，微小体積の表面におけるベクトル場の外向きの流束の和をその微小体積で除して，体積 → 0 の極限をとったものである．

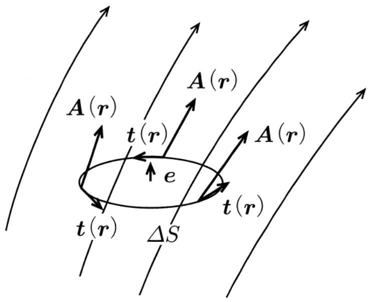


図 12　回転の $\boldsymbol{e}$ 方向成分.

4.3 回転

ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の回転はベクトル場である．点 $\boldsymbol{r}$ を含む微小平面を考え，その向きを様々に変えて

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{\mathrm{C}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})\,ds}{\Delta S} \tag{22}$$

を計算したとき，最大値を与える微小面の法線の向きが $\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の向きで，そのときの大きさが $\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の大きさである．ここで，ΔS は微小面の面積，ds はその外周 C に沿った微小線分，$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})$ は接線方向の単位ベクトルである．あるいは，任意の $\boldsymbol{e}$ 方向成分が

$$[\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})]\cdot\boldsymbol{e}\equiv\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{\mathrm{C}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})\,ds}{\Delta S} \tag{23}$$

で与えられるベクトル場と言ってもよい（図 12）．つまり，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の回転の $\boldsymbol{e}$ 方向成分は，$\boldsymbol{e}$ に垂直な微小平面 ΔS の外周上での $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の周回積分を ΔS で除して，$\Delta S\to 0$ の極限をとったものである．ただし，$\boldsymbol{t}$ の向きは，その向きに右ネジを回したときにネジが $\boldsymbol{e}$ の方向に進む向きにとる．なお，今後積分記号の中では，$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})$ を $\boldsymbol{t}$ と略記する．

5. 勾配，発散，回転のデカルト座標表示の導出

5.1 勾配

(20) からデカルト座標表示 (16) の例えば x 成分の表式を導くには，$\boldsymbol{e}$ として $\boldsymbol{e}_x$ をとり，それに伴って $\Delta s=\Delta x$ とすればよく，

$$[\nabla\phi]_x=\nabla\phi\cdot\boldsymbol{e}_x=\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial x} \tag{24}$$

が得られる．

5.2 発散

(21) からデカルト座標表示 (17) を導くには，

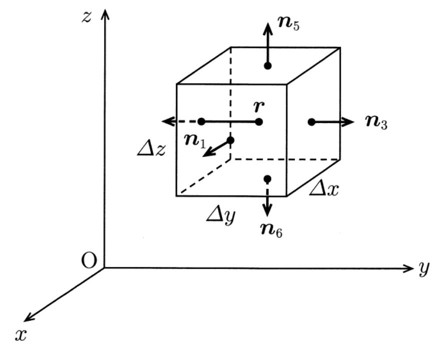


図 13　発散のデカルト座標表示の導出.

図 13 に示した体積 ΔV の微小直方体の表面から外に出ていくベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の流束を，以下に従って計算する．

面 S_i の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}_i$ とし，面 S_i 上の任意の点（例えば中央の点）におけるベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の値を $\boldsymbol{A}(i)$，また x 成分等を $A_x(i)$ 等と書けば，面 S_1～S_6 を通って微小直方体から外へ出ていく流束は，

$$\oint_{\mathrm{S}}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS\simeq\boldsymbol{A}(1)\cdot\boldsymbol{n}_1\Delta y\Delta z+\boldsymbol{A}(2)\cdot\boldsymbol{n}_2\Delta y\Delta z+\cdots+\boldsymbol{A}(6)\cdot\boldsymbol{n}_6\Delta x\Delta y \tag{25}$$

と近似できる．ここで

$$\boldsymbol{A}(1)\cdot\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{A}(1)\cdot\boldsymbol{e}_x=A_x(1)=A_x(\boldsymbol{r})+\frac{1}{2}\frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x, \tag{26}$$

$$\boldsymbol{A}(2)\cdot\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{A}(2)\cdot(-\boldsymbol{e}_x)=-A_x(2)\simeq-\left[A_x(1)-\frac{1}{2}\frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x\right] \tag{27}$$

だから，

$$\boldsymbol{A}(1)\cdot\boldsymbol{n}_1\Delta y\Delta z+\boldsymbol{A}(2)\cdot\boldsymbol{n}_2\Delta y\Delta z\simeq\frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z=\frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta V \tag{28}$$

となる．同様に残りのすべての向い合う面に対しても計算して加え合わせれば，

$$\oint_{\mathrm{S}}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS\simeq\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Delta V \tag{29}$$

となる．$\Delta V\to 0$ ($\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, $\Delta z\to 0$) の極限をとれば $\simeq$ は $=$ になるので，これを (21) の右辺の分子に代入すれば (17) が得られる．

5.3 回転

(23) からデカルト座標表示 (18) の例えば z 成分（$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}_z$）を導くには，図 14 で示したような

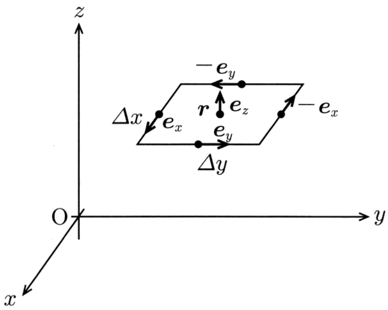


図 14　回転のデカルト座標表示の z 成分の導出.

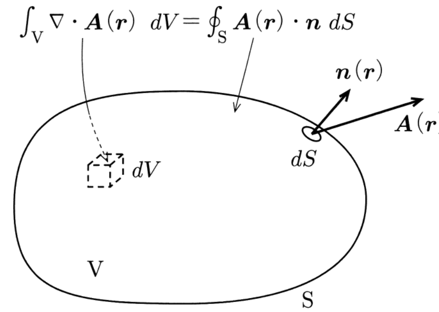


図 15　ガウスの定理.

$\boldsymbol{r}$ を含む z 軸に垂直で x 軸，y 軸に平行な辺を持つ面積 ΔS の微小長方形を考え，その外周上で右辺のベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の矢印方向の周回積分を計算する.

辺 l_i 上の任意の点（例えば中央の点）におけるベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の値を $\boldsymbol{A}(i)$，また x 成分等の値を $A_x(i)$ 等と書けば，Δx, Δy は微小だから

$$\oint_C \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t}\,ds \simeq A_x(1)\Delta x + A_y(2)\Delta y - A_x(3)\Delta x - A_y(4)\Delta y \quad (30)$$

と近似できるが，さらに $A_x(3) \simeq A_x(1) + (\partial A_x/\partial y)\Delta y$ 等より

$$[A_x(1) - A_x(3)]\Delta x \simeq -\frac{\partial A_x}{\partial y}\Delta y\Delta x, \quad (31)$$

$$[A_y(2) - A_y(4)]\Delta y \simeq \frac{\partial A_y}{\partial x}\Delta x\Delta y \quad (32)$$

を得る．よって (30) は

$$\oint_C \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t}\,ds \simeq \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta S \quad (33)$$

となる．$\Delta S \to 0$ ($\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$) の極限をとれば $\simeq$ は $=$ になるので，これを (23) の右辺の分子に代入すれば (18) の z 成分が得られる.

6. ガウスの定理とストークスの定理

(20)〜(23) の定義を用いて，ガウスの定理とストークスの定理を導く.

6.1 ガウスの定理

ガウスの定理は，ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ があるときに，それに関連したスカラー場 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の任意の体積 V 内の体積積分と，その体積の表面上での $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の面積分の関係

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\,dV = \oint_S \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}\,dS \quad (34)$$

である（図 15).

十分小さい体積 ΔV に対しては，その表面を S とすると，(21) から

$$[\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})]\,\Delta V \simeq \oint_S \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}\,dS \quad (35)$$

が成り立つ．任意の大きさの体積 V に対しては，それを n 個の微小領域 ΔV_1, ΔV_2, $\cdots$, ΔV_n に分けると，それぞれの微小領域で (35) が成り立つから，それらをすべて加え合わせて，

$$\sum_{i=1}^{n}[\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i)]\Delta V_i \simeq \sum_{i=1}^{n}\oint_{S_i}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}\,dS \quad (36)$$

である．両辺について，$\max[\Delta V_i] \to 0$ という制限下の分割法で $n \to \infty$ とする極限をとれば，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i)]\,\Delta V_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\oint_{S_i}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}\,dS \quad (37)$$

左辺は積分の定義そのものである．右辺の和について見ると，隣接する ΔV_i の境界面の寄与は，図 16 のように $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が同じで法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きが逆だから符号が反対になって打ち消し合うので，分割とは無関係に，もとの体積 V の外表面 S の寄与のみが残る．よって，ガウスの定理 (21) が得られる.

6.2 ストークスの定理

ストークスの定理はベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ があるときに，それに関連したベクトル場 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の任意

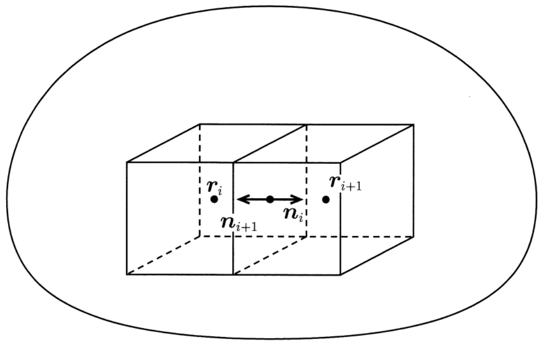


図 16　境界面の寄与は打ち消し合う．

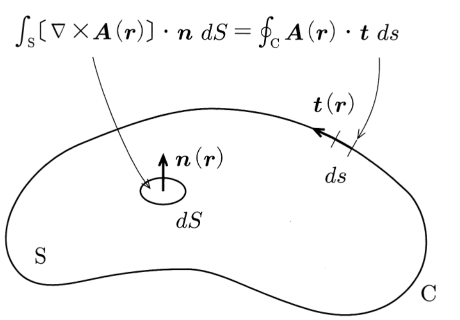


図 17　ストークスの定理.

の面 S 上での面積分と，その面の外周での $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の線積分の関係

$$\int_S [\nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})] \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \oint_C \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{t}\, ds \quad (38)$$

である（図 17）.

面 S の面積 ΔS が十分小さいとき，その外周を C とすると，

$$[\nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})] \cdot \boldsymbol{n}\, \Delta S \simeq \oint_C \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{t}\, ds \quad (39)$$

が成り立つ．有限の大きさの任意の曲面 S に対しては，それを n 個の微小平面 $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$ に分けると，それぞれの微小平面で (39) が成り立つから，それらをすべて加え合わせて，

$$\sum_{i=1}^{n} [\nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i)] \cdot \boldsymbol{n}_i\, \Delta S_i \simeq \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{t}\, ds \quad (40)$$

である．両辺について，$\max[\Delta S_i] \to 0$ という制限下での分割法で $n \longrightarrow \infty$ とする極限をとれば，$\simeq$ は $=$ となる．

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [\nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i)] \cdot \boldsymbol{n}_i\, \Delta S_i$$

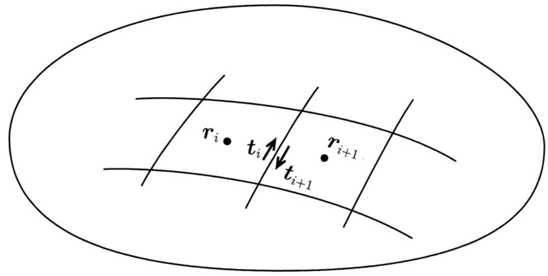


図 18　境界線の寄与は打ち消し合う．

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{t}\, ds \quad (41)$$

左辺は積分の定義そのものである．右辺の和について見ると，隣接する ΔS_i の境界線の寄与は，図 18 のように $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が同じで接線単位ベクトル $\boldsymbol{t}$ の向きが逆だから符号が反対になって打ち消し合うので，分割数によらずもとの面積 S の外周 C の寄与のみが残る．よって，回転定理 (23) が得られる．

7. ベクトルの 2 階微分の恒等式

紙幅が尽きたので割愛するが，よく知られたベクトル場の 2 階微分の公式

$$\nabla \times [\nabla \phi(\boldsymbol{r})] = 0, \quad (42)$$

$$\nabla \cdot [\nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})] = 0 \quad (43)$$

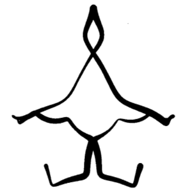
も，同様に座標によらずに理解できる[5,6]．

参考文献

1) 「数理科学」2005 年 5 月号.
2) 兵頭俊夫，「数理科学」2005 年 5 月号 19.
3) 兵頭俊夫著，裳華房テキストシリーズ・物理『電磁気学』（裳華房，2000 年）.
4) Purcell, Edward M. 著，飯田修一監訳，バークレー物理学コース〈2〉『電磁気〈上，下〉』（丸善，1989 年）.
5) 兵頭俊夫・和田健，「パリティ」2001 年 8 月号 57.
6) 加藤正昭，「数理科学」2005 年 5 月号 29.

（ひょうどう・としお，東京大学大学院総合文化研究科）
（わだ・けん，東京大学教養学部附属教養教育開発機構）

力線から物理をイメージする



川 村　清

1. 電気力線の湧き出しとガウスの法則

静電気学の授業では，最初にクーロンの法則を学び，その直後に電気力線について学ぶ．つづいて，応用上も有用なガウスの法則がクーロンの法則から導かれる．ここでは，まず，電気力線の湧き出しの規則からこの導出を行おう．

電気力線は有向曲線（矢印で向きを指定された曲線）であって，各点での電場の向きはその点を通る電気力線の接線ベクトルの向きである．電気力線は次のように描かれる．

1) 電気量が q の電荷からは q/ε_0 本の電気力線が等方的に出る（図 1 (a) 参照）．ただし，$q<0$ のときは，その電荷に q/ε_0 本の電気力線が等方的に入って消える．
2) 電気力線は，無限遠を除き，電荷以外のところに端点がない．また，電気力線には分岐点や合流点がない．

電気力線が正電荷から出たり，負電荷に入ることをまとめて電気力線が電荷から「湧き出す」ということにする．ただし，負電荷から湧き出す電気力線の数は負の値を持つものとする．

直感的にガウスの法則を導くときの基礎となる上の記述のうちの 1) についていくつか注意しておきたい．

まず第一に，電気力線の本数は無名数（次元がなく，したがって物理学的単位を持たない量）である．ところが，q/ε_0 という量は，Vm（ボルト・メータ）という次元を持っている．したがって，「$q/4\pi\varepsilon_0$ 本の電気力線」という言い方は厳密に言うと正しくない．より本質的な問題は，そもそも電気力線は電荷の周りの空間の任意の場所を通って引いてよいものだから，その数は有限であってはならないということである．

このような難点を含んではいるものの，上の記述から導かれる結果は数学的にも正しく導かれる．

ある閉曲面 Σ を内から外に貫く電気力線の数と外から内に貫く電気力線の数の差を $N(\Sigma)$ と表し，面 Σ から湧き出す電気力線の数とよぶことにする．電気力線が途中でできたり消えたりしないということから，$N(\Sigma)$ について次のことが導

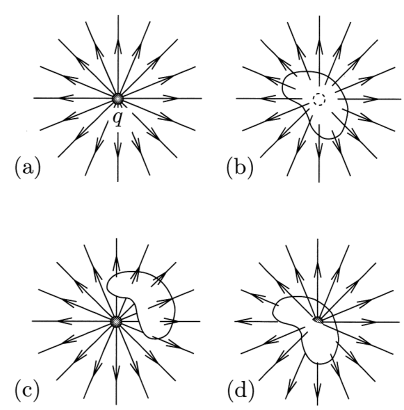


図 1　点電荷 q と閉曲面 Σ からの電気力線からの湧き出し．(a) 単独の点電荷，(b) 点電荷が Σ の内部にある場合，(c) 外部にある場合，(d) 面上にある場合．

かれる．

1) 電気量 q の点電荷が図 1(b) のように閉曲面 Σ の内部にあるとき，この面から湧き出す電気力線の数は点電荷から湧き出す数と等しく $N(\Sigma)=q/\varepsilon_0$ である．
2) 図 1(c) のように閉曲面 Σ の外の電荷から電気力線が出る場合，Σ から湧き出す電気力線の数は 0 である．
3) 図 1(d) のように点電荷が閉曲面上にあるとき，そこから出る電気力線は面の両側に半分ずつ出て行く．したがって，閉曲面から湧き出す電気力線の数は，点電荷から湧き出すものの半分の $q/2\varepsilon_0$ である．

図 1 には，点電荷が 1 個のみあるときの電気力線が描いてある．点電荷が 2 個以上あるときは，電気力線はもっと複雑になるが，上で述べたことは拡張できて，Σ から湧き出す電気力線の総数は

$$N(\Sigma)=\frac{Q_{\rm in}}{\varepsilon_0}+\frac{Q_{\rm on}}{2\varepsilon_0} \tag{1}$$

と表される．ここに，$Q_{\rm in}$ は閉曲面 Σ の内部の電荷の和，$Q_{\rm on}$ は曲面上の電荷の和である．

電気力線に垂直な単位面積を貫く電気力線の数をその密度とよぶことにする．図 1(b) の閉曲面が点電荷を中心とする半径 r の球面の場合，電気力線は球面に垂直だから，その上での電気力線の密度は点電荷から湧き出す電気力線の数を球の面積で割って，

$$\frac{(q/\varepsilon_0)}{4\pi r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{2}$$

と計算できる．右辺は，クーロンの法則から導かれる電場の表式に他ならない．したがって，ある点での電気力線の密度からそこでの電場の大きさが分かり，電気力線の向きから電場の向きが分かることになる．

法線の向きが $\boldsymbol{n}$ の面積 dS の面を貫く電気力線の数は $EdS\cos\theta(n,E)=E_n dS$ である．ここに，$\theta(n,E)$ は $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{E}$ のなす角，E_n は $\boldsymbol{E}$ の法線成分である（図 2 参照）．したがって，閉曲面 Σ から湧き出す電気力線の数は電場ベクトル

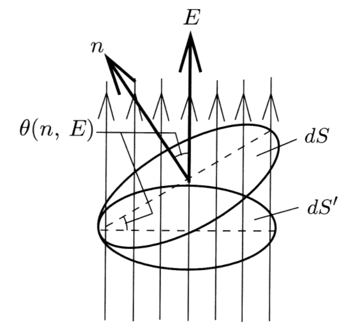


図 2 dS' は，dS の電気力線に垂直な平面への射影．$dS'=dS\cos\theta(n,E)$ の関係がある．

を使って

$$N(\Sigma)=\int\!\!\int_{\Sigma}E_n dS \tag{3}$$

のように表すこともできる．$N(\Sigma)$ についての 2 つの表式 (3) と (1) から $N(\Sigma)$ を消去すると

$$\int\!\!\int_{\Sigma}E_n dS=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(Q_{\rm in}+\frac{Q_{\rm on}}{2}\right) \tag{4}$$

が得られる．こうしてガウスの法則が導かれた．

2. 球面上に分布する電荷と電気力線

半径 a の球面上に電気量 Q の電荷が一様な面密度で分布しているとき球内外の電場は

$$E(r)=\begin{cases}0, & r<a\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & a<r\end{cases} \tag{5}$$

と計算できる．

それでは，球面上ではどうなるだろうか．現実世界では電荷の厳密な 2 次元分布はないから，このような特異な状況は考える必要がない．しかし，クーロンの法則を使うと，電荷が分布している球面には外向きに

$$E(a)=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a^2} \tag{6}$$

という電場ができることを導くことができる[1]．この特異な場合までクーロンの法則と同じ結論を導くようにするには (1) 式の $Q_{\rm on}$ の項が必要である．実際，Σ が半径 a の球面の場合，(1) 式に

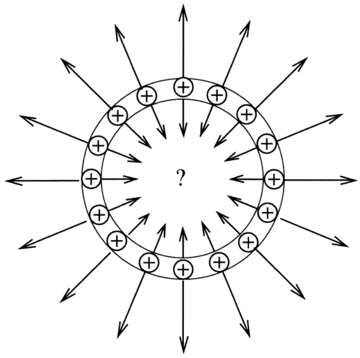


図 3 球面上の電荷から出る電気力線．内向きに出る電気力線はどこで消えるのだろうか．

$Q_{\rm in} = 0$, $Q_{\rm on} = Q$ を代入してガウスの法則を使うと，(5) 式の他に，$r = a$ のときの表式として，(6) の表式が導かれる．

ところで，大学の 1 年生にこの問題を出すと，授業のあとで球面上の電荷はどうして球面の内部に電場を作らないのかと聞きにくる学生が毎年いたものである．

電気力線の性質を使って答えるなら，次のようになる．すなわち，図 3 のように球面から内側に出る電気力線があったとすると，それは内部のどこかで消えなくてはならない．しかし，球の内部には電荷がないのだから，電気力線が終わる場所がない．したがって，球面から内側に出る電気力線はあってはならない，という説明である．

3. div 演算子と電気力線

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x, y, z)$ があるとき，

$$\mathrm{div}\boldsymbol{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \qquad (7)$$

を $\boldsymbol{V}$ の発散とよぶのは流体力学に由来するのだと思うが，静電気学の立場から見ても納得のいくことだということをこれから示す．

電荷が空間に連続的に分布している場合，体積 dV の空間にある電荷を $\rho(\boldsymbol{r})dV$ とする．$\rho(\boldsymbol{r})dV$ を電荷密度とよぶ．これを ε_0 で割って得られる数の電気力線がその空間から湧き出す．したがって，ある閉曲面 Σ から湧き出す電気力線の数は

$$N(\Sigma) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int\!\!\int\!\!\int_\Omega \rho(\boldsymbol{r}) dV \qquad (8)$$

となる．ここに Ω は，閉曲面 Σ によって囲まれる空間である．なお，Σ の「表面の体積」は 0 とみなしてよいから，電荷密度が連続関数の場合は $Q_{\rm on} = 0$ と考えるべきである．

$\rho(\boldsymbol{r})$ の値が連続に変化するなら，(8) 式の右辺は領域 Ω の内部での ρ の平均値に Ω の体積 V をかけたものになる．したがって，$N(\Sigma)/V$ は $V \to 0$ の極限で ρ/ε_0 に収束するだろう．この極限値を ν と表すことにしよう．すなわち，

$$\nu = \lim_{V \to 0} \frac{N(\Sigma)}{V} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (9)$$

である．これは，単位体積の 3 次元領域から湧き出した電気力線の数という意味を持ち，電気力線の発散とよばれる．

一方，$N(\Sigma)$ は (3) 式のように，電場ベクトルの表面積分を使って表すことができる．そこで，(3) 式を (9) 式の中央に代入すると

$$\lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int\!\!\int_\Sigma E_n dS = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (10)$$

となる．左辺は，電気力線の発散として導入されたが，電場ベクトルで書かれているので，これを電場の発散と呼び，$\mathrm{div}\boldsymbol{E}$ と書くことにする．すなわち，電場の発散は

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int\!\!\int_\Sigma E_n dS \qquad (11)$$

と定義される．こうしておくと，(10) 式は

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (12)$$

と書き直される．これは，微分形のガウスの法則と呼ばれる．

閉曲面 Σ が図 4 の直方体の表面である場合に，(11) 式の右辺を書き直してみる．3 辺の長さが十分短いとき，面 EFGH から (11) 式の右辺への寄与はこの面の外向き法線の向きが z 軸の向きだから $E_z(x, y, z + dz)dxdy$ である．面 ABCD の面の外向き法線は，$(-z)$ の向きで，$E_{-z} = -E_z$ だから，この面からの寄与は $-E_z(x, y, z)dxdy$ で

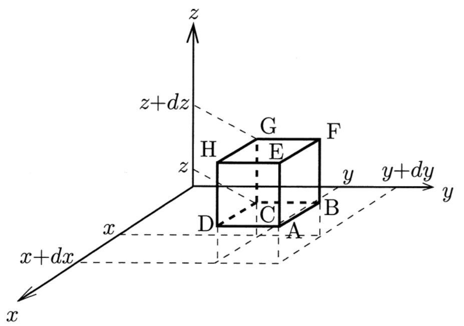


図 4　(11) 式から (14) 式を導くための参考図.

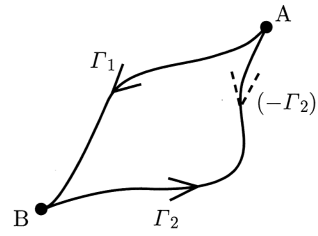


図 5　積分路の分割.

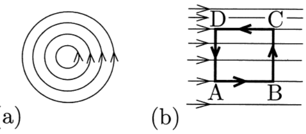


図 6　存在し得ない電気力線の例.

ある．したがって，

$$
\begin{aligned}
&(z\text{ 軸に垂直な 2 つの面からの寄与})\\
&= \frac{[E_z(x,y,z+dz)-E_z(x,y,z)]dxdy}{dxdydz}\\
&= \frac{\partial E_z}{\partial z} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

が導かれる．残り 4 つの面からの寄与は，以上の議論で x,y,z の循環置換をすることによって求まり，それらを合わせて，

$$
\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \qquad (14)
$$

が導かれる．

4. 渦なしの法則と電気力線

これまで，ガウスの法則について述べてきたが，クーロンの法則から導かれる静電場に関するもう一つの基本法則は渦なしの法則である．これは，任意の閉曲線 Γ に対して

$$
\oint_\Gamma E_t ds = 0 \qquad (15)
$$

であるという法則である．ここに E_t は電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ の接線成分を意味し，ds は積分路 Γ の線素の長さである．

電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ は単位電荷に働く電気的な力を表す．したがって，(15) 式は，単位電荷を閉曲線に沿って 1 周させる間に電場がする仕事が 0 になることを意味する．

ここで，図 5 のように 1 つの周回路を Γ_1 と Γ_2 に分けたとすると，(15) 式から

$$
\oint E_t ds = \int_{\Gamma_1} E_t ds + \int_{\Gamma_2} E_t ds = 0 \qquad (16)
$$

が導かれる．中央の第 2 項は B から A まで Γ_2 に沿って単位電荷を移動させる間に電場がした仕事である．この仕事は，A から B まで Γ_2 の回路上を点線の矢印で示したように Γ_2 とは反対に移動させたときに電場がする仕事に (-1) をかけたものと等しい．そこで，この反対向きの回路を $(-\Gamma_2)$ と表すと，(16) 式から

$$
\int_{\Gamma_1} E_t ds = \int_{(-\Gamma_2)} E_t ds \qquad (17)
$$

が導かれる．これは，A から B へ単位電荷を移動させたとき電場がする仕事は，Γ_1 を経ても $(-\Gamma_2)$ を経ても同じ値だということを意味するから，この仕事は，始点 A と終点 B の位置には依存するがその間の経路には依存しないということになる．この仕事は A と B の電位差とよばれる．

この法則に従う電気力線は図 6 (a) のように閉じることはない．というのは，閉じた電気力線を Γ に選んで (15) 式の積分を実行するとこの経路上で $E_t = E > 0$ であるため，積分の値が 0 にならないからである．

また，図 6 (b) のように，隣り合う電気力線の間隔が一定でない直線的な電気力線の分布はあり得ない．というのは，例えば図 6 (b) の A→B→

C→D→A という長方形の回路に沿って (15) の積分を実行したとする．B→C と D→A では経路の向きが電気力線と直交しているから，この上では $E_t = 0$ である．A→B では電場の向きが経路の向きと一致して一定だから，この電場の値を E_1 とすると $E_t = E_1$ であり，線積分への寄与は $E_1 l$ となる．ただし，l は AB の長さである．また，C→D の電場の大きさを E_2 とすると，この区間では $E_t = -E_2$ となるから，(15) 式の線積分への寄与は $-E_2 l$ になる．そこで，この図のように，$E_1 \neq E_2$ のとき (15) 式が成り立たない．

われわれは，平行平板コンデンサーの電気容量の計算をするとき，極版の間の電気力線がどこでも極板に垂直に等密度で外部に電気力線が漏れ出さないという仮定をする．そのような電気力線の分布は図 6 (b) の電気力線の分布の特殊な例になるから，渦なしの法則に反する．したがって，コンデンサーの縁で電気力線は図 7 (a) のように外に膨らむか (b) のように内に引っ込むかのどちらかである．それではどちらだろう．

渦なしの法則によると，上の極板上の一つの点から下の極板上のもう一つの点へ 2 つの電気力線に沿って単位電荷を移動させたときに電場がする仕事は等しいはずである．ところが，一つの極板上で電位は一定でそこを移動する間は電場は仕事をしないから，極板間の任意の電気力線に沿って移動したときの仕事が等しくなくてはならない．

図 7 (b) の経路 Γ_2 の周りの電気力線の密度は，端から離れた Γ_0 の付近より大きいから，Γ_2 に沿っての E_t は，Γ_0 に沿っての E_t より至る所大きいことが分かる．しかも，経路 Γ_2 は Γ_0 より長い．したがって，電場が単位電荷にする仕事は Γ_2 に沿って移動させたときのほうが Γ_0 に沿って移動させたときより必ず大きくなってしまい，

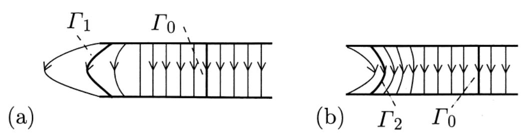


図 7　電気力線はどちらへ曲るか？

渦なしの法則に反する．したがって，電気力線が図 7 (b) のように内に引っ込むことはあり得ない．

一方，図 7 (a) の経路 Γ_1 を考えると，経路付近の電気力線の密度から判断して，この経路上の電場の大きさは Γ_0 より小さく，経路の長さは長くなる．したがって，適当に経路の形を決めれば，極板間を単位電荷を移動させるときの仕事は経路によらなくすることができる．したがって，コンデンサーの縁の付近の電気力線は図 7 (a) のように外に漏れるように描く必要がある．

5. 電気力線に働くマクスウェル応力

コンデンサーの縁の付近の電気力線の形を見ると，電気力線の間には反発力が働いていて，それによって縁の近くの電気力線が外に押し出されたように見える．しかも，それぞれの電気力線はできるだけ短くなろうとする性質があり，そのため電気力線が膨らみすぎるのを防いでいるように見える．

同じことは磁力線についても言えて，いずれにせよ，力線に沿って張力が働き，それに垂直に圧力が働いていると考えることができる．この圧力，張力をマクスウェル応力と言う．力線に垂直な単位面積を通して働く力（張力）を $P_{\parallel}$，力線に平行な単位面積を通して働く力（圧力）を $P_{\perp}$ とすると，これらの応力はその場所の電場ベクトルを使って

$$P_{\parallel} = -\frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2, \tag{18}$$

$$P_{\perp} = \frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 \tag{19}$$

と表される．ただし，応力とは，圧力のように単位面積あたりに働く力を言う．応力の符号は，圧力を正とした．

ただし，空間に媒質があってその媒質の中に圧力が働いたり張力が働いたりするわけではない．電磁場は真空中にも存在することに注意しよう．したがって，マクスウェル応力はバーチャルに存在する力線の間とその内部に働くバーチャルな力

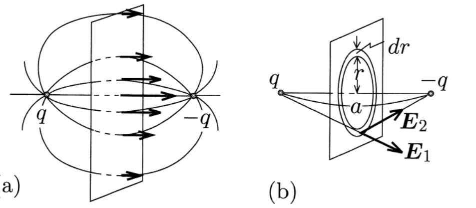


図 8　2 つの電荷の間の引力のマクスウェル応力による解釈．(a) 2 つの電荷の 2 等分面には，右の空間の電気力線が左の空間の電気力線を右に引くような張力が働く．(b) 張力を計算するための参考図．$\boldsymbol{E}_1$ と $\boldsymbol{E}_2$ は，それぞれ，電荷 q と $-q$ が作る電場．

と考えてよい．

しかし，マクスウェル応力が現実に働いていると考えてよい場合がたくさんある．その一つの例を図 8 に示す．

クーロンの法則では，符号が異なるこの 2 つの電荷は距離 a 離れた相手に引力を及ぼすと言い表される．それに対し，一つの電荷は電気力線を引きつけ，その電気力線が他端にある電荷を引きつけ，ちょうど 2 人の人が 1 本の縄を引き合って引き合うのと同じように，間接的に電荷の間に引力が働くと考えることもできる．

この考えに従って，図 8 (a) に示した 2 つの電荷の垂直 2 等分面上で電気力線に働く張力の和を計算してみよう．そのために，まず，(b) の円環のところに 2 つの電荷が作る電場を求める．対称性により，それぞれの電荷が作る電場 $\boldsymbol{E}_1$ と $\boldsymbol{E}_2$ の上下方向の成分は消し合い，左右方向の成分は加え合わさって右向きに

$$E = \frac{2 \times q}{4\pi\epsilon_0(r^2 + (a/2)^2)} \times \frac{(a/2)}{(r^2 + (a/2)^2)^{1/2}} \tag{20}$$

の電場が残る．これを (18) 式に代入し，円環の面積 $2\pi r dr$ をかけてすべての円環の寄与を加え合わせると，図の平面より右の空間にある電気力線が左の空間の電気力線を引く力の総和が出て，

$$F = \frac{q^2(a/2)^2}{(2\pi)^2\epsilon_0}\int_0^\infty \frac{2\pi r}{2(r^2 + (a/2)^2)^3}dr = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \tag{21}$$

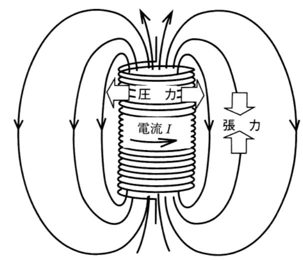


図 9　コイル付近のマクスウェル応力．磁力線には，それを短くするような張力が働き，内部の込んだ磁力線には互いに反発力が働く．その結果，コイルには縮まりかつ太くするような張力が働く．

と計算できる．最後の結果は，クーロンの法則と一致していることから，電荷間の力は電気力線を介して伝わるという解釈ができるのである．

マクスウェル応力は磁場でも働く．すなわち，磁力線（磁束線）に沿って張力

$$P_\parallel = -\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2 \tag{22}$$

が働き，磁束の間には磁場に垂直に

$$P_\perp = \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2 \tag{23}$$

という圧力が働く．

このような力が働くとすると説明しやすい現象に，コイルの破壊という現象がある．棒状のコイルに電流を流すと，図 9 のような磁力線ができる．強い電流を流すと，磁力線が短くなるように張力が働くため，コイルがつぶれることがある．あるいは，コイルの中空部分にできる多数の磁力線の間の反発力によって，コイルが水平方向に破裂することもある．どちらが起きるかは材料の強度によって決まるが，いずれの破壊も条件を整えれば起こり得る．

この場合のマクスウェル応力もバーチャルな力であり，コイルに働くこのような力は，コイルが作る磁場中の電流に働くローレンツ力であると説明することはもちろん可能である．

参考文献

1)　田中秀敏：大学の物理教育，**12** (2006) 61.

（かわむら・きよし，慶應義塾大学名誉教授）

流れのイメージ
可視化とグラフ化

高木　隆司

1. はしがき

表題の中で「可視化」と「グラフ化」という２つのキーワードを提示したので，まずこれらの違いを述べなければならない．可視化とは，目で見えない自然現象を（たまには社会現象や文化を）見えるようにすることである．そのとき，様々な道具や材料を用いて実際の現象を観察記録し，なるべく真の姿に近いものを再現しようとする．私たちは，それによって，自然を見たと思って納得するのである．

グラフ化とは，私たちが理解したことを，図形として表現することによって，他人に伝えることである．たとえば，２次関数を放物線で表すことも，その関数関係のグラフ化である．自然現象を可視化したものを略図で表すこともある．これも，概念的に把握したあとで図示するので，一種のグラフ化である．人間の脳には，物事を単純化してとらえようとする癖があるらしく，グラフ化された図形は概して単純である．

可視化とグラフ化の違いを示す身近な例として，三権分立という概念を取り上げてみよう．この概念は，しばしば，図１のような図で表現される．図中の矢印は，互いに影響を及ぼすことを示す（詳細は省略する）．この図は，国家の成り立ちに関する概念をグラフ化したものであり，現実の社会現象を可視化したものではない．

現実を撮影した写真や映像によって三権分立を可視化することは，不可能ではないであろうが，かなり難しい．筆者は，高等学校の日本史の授業で，1891年に起きた大津事件に関して学んだとき，日本史の先生が話されたことを今でも覚えている．日本で起きたロシアの皇太子の傷害事件に際して，裁判所は，政府の圧力に抗して，法に基づいて裁いた．そのために，当時の青木外相が辞任した．日本史の登場人物は，概してけなされる場合が多いのに，この裁判官をけなす記述はないそうである．もし，判決が出た直後に，裁判所前で垂れ幕を示す人がいたとしたら，その写真は三権分立の可視化になったかもしれない．ただし，事情を知らない人には，その写真を見ても，解釈を聞かない限りその意味を理解するのは難しいだろう．

ここで大津事件の例を述べたのは，可視化の結果から真の姿を読み取るには，正しい解釈が必要だということを強調するためであった．一方，グラフ化されたものはわかりやすいが，現実そのものではないので真実を伝えていない可能性がある．

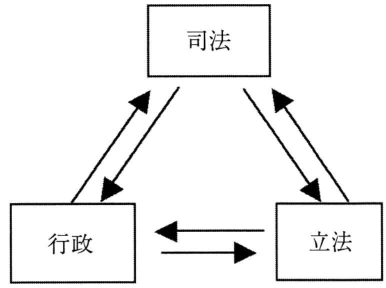


図１　三権分立のグラフ化．

蛇足になるが，昔，ある国際会議で歴史家の講演を聞いたとき，興味ある指摘がなされ，それが今でも印象に残っている．歴史は本質的に一回しか起きないので，たまたま撮影された写真が，後で構成される歴史に必要以上の影響を与えることがある（確か，ドイツでナチスが台頭したころの写真が例として示された）．歴史家は，限られた数の証拠から世界全体の動向を判断しなければならないのである．

再現性を前提とする自然現象の研究では，繰り返し確認することが可能なので，基本的にはこの種の問題点は起きない．ただし，宇宙の進化と生命の進化は一回しか起きていないから，そこでは同様の問題が起き得る．それ以外の分野でも，他人が求めた結果を同一でない装置で追試したものは，厳密に言うと一度しか起きない別個の事例であるとも言える．この点は，心に留めておかねばならないだろう．

2. 流れの可視化の問題点

身近な例として，カップの中のコーヒーをかき混ぜたときに発生する渦を，水面にクリームを浮かせることによって可視化してみよう．この実験は容易にできるので，読者も試みられたい．なお，クリームはコーヒーより重いので，普通は沈んでしまい，可視化にならない．そこで，コーヒーに大量の砂糖を混ぜておく必要がある（甘すぎて飲めないくらい）．なお，泡立てたクリームは，軽いので水面に浮く．しかし，泡どうしの凝集力によって，かたまりになり，流れに追従しないので，可視化の役に立たない．

図 2 に示したクリームの筋は，らせん形になっている．しかも，2 本のらせんが中央でからみ合っている．すなわち，2 重のらせんである．

この写真から，コーヒーはらせん形の軌道に沿って流れていると判断すると間違いである．実は，カップ内の流れは，中心軸のまわりに円運動をしているというのが真実に近い．もっと詳しく言うと，図 3 に示すように，中心軸近くの芯と呼ばれる領域と，その外側の領域からなる．



図 2　クリームで可視化されたコーヒーカップ内の渦．

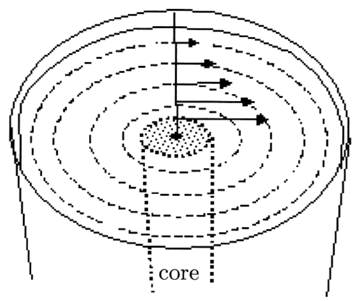


図 3　渦の流れ分布のグラフ化．中央の芯は，剛体のように回転し，そのまわりの流体も円運動をしている．

流速の大きさは，芯の内部では中心からの距離に比例し，外側では距離に反比例する．その結果，芯の周辺で流速が最大になる．図 3 は，流れの分布がわかった後で描いたものなので，グラフ化であると言える．図 3 に基づいて，図 2 のような可視化写真が得られる理由を考えてみよう．

図 3 に示した芯の近くに，図 4 (a) のように上下に細長くクリームをたらしたとしよう．芯の周辺で最大になる流速分布によって，クリームは図 4 (b) のように変形する．左右にずれたクリームは，芯に巻きつくように変形し（図 4 (c) 参照），それが継続して図 4 (d) のような 2 重の渦巻き線になる．したがって，私たちは，可視化された渦巻き模様から，同心円状の流れがあると判断しなければならないのである．

可視化のために流体中に注入するものを，一般にトレーサーと呼ぶ．上記の説明では，トレーサーが流れに忠実に追従しながら移動することを前提としていた．しかし，これも，常に保障されるわ

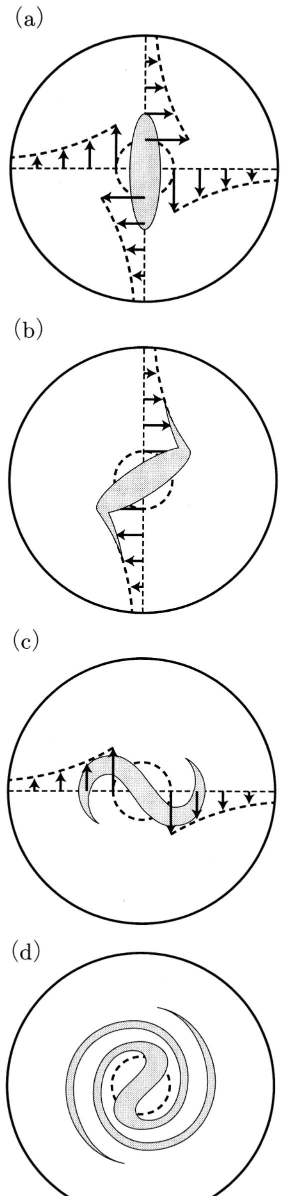


図 4　図 2 の渦巻き模様ができる過程.

けではない．トレーサーと流体の密度が異なると，流体中を沈降したり浮上したり，遠心力の効果で流れとは別の方向に動いたりする．可視化実験では，このような効果を押さえる注意が必要になる．

3. グラフ化の問題点

可視化によって流れの様子を正しく把握したとする．その成果を，流れのスケッチのような単純

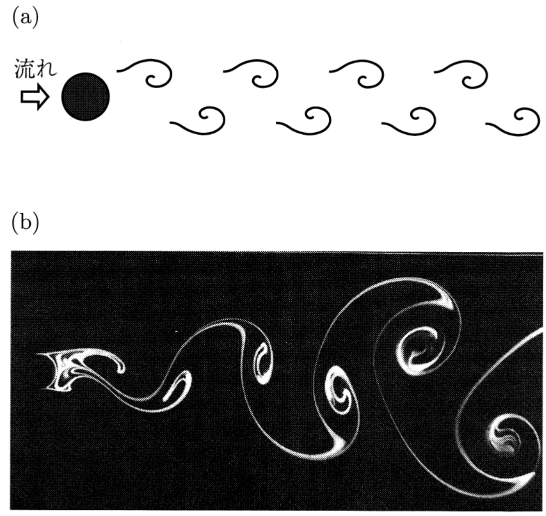


図 5　カルマン渦のイメージ．(a) グラフ化された姿，(b) 種子田により可視化された姿（文献 1) より転載).

な図で表現することがある．例として，自然界にしばしば現れるカルマン渦を取り上げてみよう．

カルマン渦は，しばしば図 5 (a) のように描かれる．これは可視化された流れではなく，あくまで解釈による姿であり，「円柱に流れが当たると，その後方に逆向きに巻く渦が交互に放出され，2 列の渦列ができる」という理解を図示したものである．その意味でグラフ化されたものである．この記述，およびそのグラフ化である図 5 (a) は，間違いとは言えないが，誤解を与えやすい．

これを，図 5 (b) の可視化写真と比べてみよう．可視化写真でも，やはり 2 列の渦が見える．しかし，もし，短い時間間隔で撮影された数枚の写真を並べてみると（あるいは動画を見ると），一つの重要な点に気がつく．円柱のすぐ後方の渦は，図 4 で示したような過程によって巻き込んでいき，確かにそこに渦が存在することがわかる．ところが，下流遠くに見える渦模様は，この巻き込み運動をやめており，ただ下流方向に平行移動しているだけである．それは，粘性やその他の機構によって渦運動が減衰したためである．すなわち，下流遠くの渦模様の周囲には渦の流れはなく，過去に円柱の近くで形成されたという履歴が見えているに

過ぎない．

このように，可視化写真には，現在起きている現象と，過去に起きた現象の痕跡が混じっているのである．前節で，可視化の結果から真の姿を把握するには，正しい解釈が必要であることを述べた．それと同じことが，カルマン渦の可視化でも成り立つ．図 5(a) のグラフ化は，誤解を与えやすいので，その解釈の役割を十分果たしていない．もっと正しい図を描くべきであるが，それが困難なので，いまだにこのような図が描かれる．

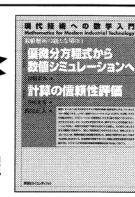
なお，粘性を持たない理想的な流体であれば，図 5(a) が真の姿を表現している場合がある．現実では，超流動ヘリウムの流れがそれに相当する．

4. 渦のグラフ化に関わる文化的背景

世界の中で，渦文様が好きな民族として，日本，アイヌ，ケルト，マヤ，周代の中国，ユーラシア遊牧民，などが挙げられるそうである．筆者の印象では，これらの民族の中でも，日本民族はとくに渦が好きである．確かに，日本の工芸には，昔から渦文様がしばしば使われてきた．渦文様は，グラフ化された渦が，伝統として固定されたものと考えられる．私たちの祖先が，渦をいかにグラフ化したか，いくつかの例で検証してみよう．

図 6 は，国宝の縄文土器の側面に刻まれた渦文様であり，縦に並んでいる 3 つの渦を，ここでは 90° 回して示してある．これは，果たして水流中の渦を表すのか，あるいはつる草が巻いた様子なのか，にわかには判定しがたい．しかしながら，中央の渦は，図 4 に示した 2 重のらせんになっていて，水流中の渦以外にはなかなか見られない形である．筆者は，縄文人たちが渦文様をしばしば採用したのは，川や海で生じる渦をみてそのエネルギーに畏敬の念をもったためではないかと考えている．

図 7 は，弥生時代の土器の上部に刻まれた渦文様である．上下 2 列に並んでいるが，渦の巻き方が上下で同じなので，カルマン渦とは異なる．1 列の渦文様を上下で繰り返したものだろう．1 列





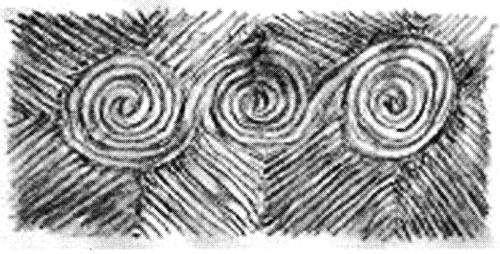


図 6　環型把手つき鉢形土器の渦文様（縄文後期，東京国立博物館蔵，高木によるスケッチ）.

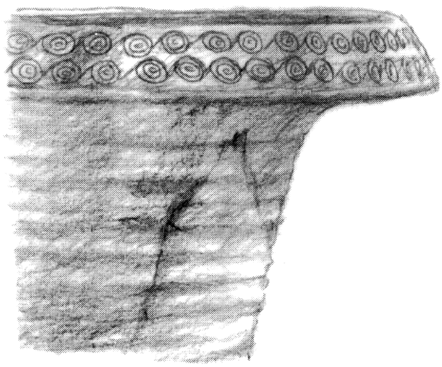


図 7　線刻土器の渦文様（弥生後期，唐古・鍵考古学ミュージアム蔵，高木によるスケッチ）.

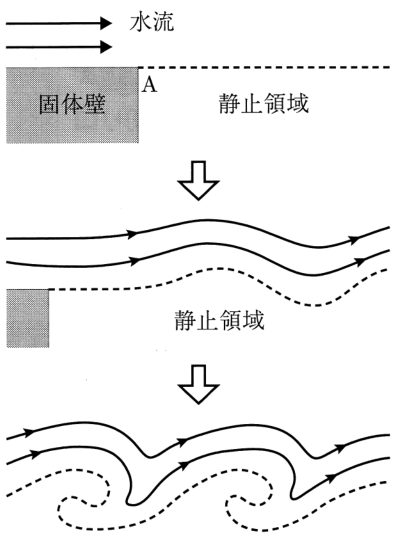


図 8　速度差の境界で発生する渦列．点線は，境界線を表す．同時に，角の A 点から注入したトレーサーも表す．

に並んだ渦が，このような斜線でつながれた状態は，実は可視化された流れの中に存在する．図 8 に示すように速度の異なる流体領域が接しているところでは，流体運動がもつ性質のために，その境界線が波立ってきて，やがてそれが渦の列になる．これらの渦を可視化すると，斜線でつながれた渦巻き模様になるのである（図中の点線）．

鳴門の渦も，鳴門海峡を抜ける潮流と，半島の影で静止している海域との間に速度差があるために，その境界で発生する渦である．図 6 の 3 つの渦は，この渦列のうちの 3 つが描かれたと見なせるかもしれない．

ところで，弥生土器の文様をよく見ると，実は渦巻きではなく，同心円になっている．このことは，弥生人たちは，自然を注意して見ることをやめ，渦文様を単なる装飾のパターンと見なしたことを示すのではなかろうか．農耕を発達させ，平野に住んだ弥生人たちは，自然の恐ろしさを忘れたのかもしれない．



図 9　袈裟襷文銅鐸の渦文様（弥生後期，東京国立博物館蔵，文献 2）より高木によるスケッチ）.

図 9 は，古墳時代の銅鐸である．その用途は完全に解明されていないが，共同体意識の象徴という説が有力である．起源は楽器と考えられていて，たたくと良い音がするそうだ．そこに表現された渦文様には，2 種類ある．一つは，上部の側面にあるもので，図 8 のような渦の連なりである．ここでは，きちんと 2 重のらせん形になっている．他の一つは，下部の側面に描かれていて，上下の 2



図 10　アイルランドのニューグランジュ遺跡の渦文様（BC30 世紀，文献 3) より高木によるスケッチ).

個がつながった渦である．

この渦のペアは，水中に鉛直に差し込んだ棒を，急に水平に動かして，その直後に引き抜いた後に生まれるものである（読者は，コーヒーとクリームを使って実験してみたらいかがだろうか)．銅鐸の渦文様を見ると，古墳時代には，縄文時代と同じように，自然の渦を率直に観察する傾向を取り戻したように思われる．もしかしたら，大規模な土木工事が始まったこの時代では，水流をまじめに観察する必要が出てきたのかもしれない．

最後に，外国の渦文様を一つ紹介しよう．大昔のヨーロッパを支配していたケルト民族が，ゲルマン民族に追われて最後に住んだ場所であるアイルランドでは，渦文様を含む遺跡が多く残されている．図 10 は，ニューグランジュ遺跡の石に刻まれた渦文様である．描かれたものはいずれも 1 重の渦巻きなので，水流を表現したのか，あるいはつる草なのかはっきりしない．しかしながら，自然を見る目をもったケルト人には，縄文人に通じる感受性が窺われるのである．

私たちの渦に対するイメージは，古代の渦文様から大きな影響を受けているように思われる．私たちがグラフ化をする際に，意識下でそれらをなぞっているかもしれない．

5. あとがき

自然現象のイメージを図として表現するとき，可視化とグラフ化の 2 つの方法があることを述べた．一般に，自然科学の研究方法には，従来は理論と実験という 2 つの方法があった．現在は，数値計算という第 3 の方法が加わっている．可視化は実験に，グラフ化は理論に属する．数値計算では，可視化とグラフ化の両方がおこなわれる．数値計算で得られた法則性をグラフとして出力したら，それはグラフ化である．トレーサーを注入して観察するという可視化実験の過程を，コンピューターで忠実に再現したら，それは可視化をしたことになる．コンピューターの発達は，可視化とグラフ化の間を埋めるような効果を生み出したと言える．

可視化とグラフ化は，どちらも自然現象のイメージを表現する方法であり，両方を得て初めて完全な把握が得られる．可視化写真は，どんな現象が起きているか推定するためのヒントを与え，それが理論を構築するときの基礎になる．逆に，理論結果を表現したグラフは，可視化写真を解釈するために参考になる．

物理学では，19 世紀から，理論物理学と実験物理学に分離した．両方の学者が緊密な交流をしている分野がある一方で，交流がおろそかになった分野もあるようだ．しかしながら，筆者は，可視化写真やグラフ化された知識には，双方が敬意を払ってきたと思う．可視化写真もグラフも，インパクトがあり，わかりやすいからである．実際，可視化写真だけを見る限りは，それを生み出した技術の詳細は見えないし，グラフを見ても，ややこしい数式は裏に隠れている．今後も，可視化とグラフ化は，科学の中で重要な地位を占めるに違いない．

参考文献

1) 種子田定俊：『画像から学ぶ流体力学』，朝倉書店，1988 年.
2) 斎藤忠，古川逸治，相賀徹夫編：『原色日本の美術 1，原始美術』，小学館，1970 年.
3) ジル・パース：『螺旋の神秘』，平凡社，1978 年.

（たかき・りゅうじ，神戸芸術工科大学）

空間の把握

相対論を中心に

佐藤　光

1. 空間とは

数学的には空間とは点の集合に何らかの構造を入れたものである．物理では通常，距離の定義できる空間，すなわち距離空間を考え，座標系を設定する．アインシュタイン（A. Einstein）の相対論が出現する以前には，空間の性質や座標系の間の変換といったことをとりたてて議論する必要はあまりなかった．それは図１の例のように，物理現象の起きる空間は３次元ユークリッド空間であり，時間のスケールはこれとは独立に存在するという舞台が物理現象を記述する前提とされていたからである．

空間や時間を自然科学の基本概念として明確に定義したのはニュートン（I. Newton）であった．力学研究の集大成として1687年に出版された『プリンキピア（自然哲学の数学的原理）』において，彼は，「絶対的な空間は，本質的に外界の何ものとも関係なく，均質で不変不動のもの」と定義し，「絶対的かつ数学的な時間は，本質的に外界の何ものとも関係なく，一様に流れるもの」と定義している．

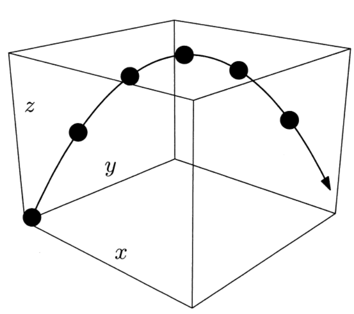


図１　ユークリッド空間での放物運動．

アインシュタインの相対論はニュートン以来200年以上にわたって信じられ続けてきた空間と時間に関する常識を覆すものであったがゆえに革命的であった．ここでは相対論によって空間の把握が素朴な３次元ユークリッド空間からどのように変容してきたかを，初等的な幾何学的方法によって考察する．

2. 特殊相対論の出発点

自然界で生じる様々な物理現象を記述するためには，粒子などの位置を指定するための空間座標系と，この座標系に固定された，時刻を指定するための時計とを用意する必要がある．以後，単に座標系と言った場合には，このような空間座標および時計が設定された系のことを言うものとする．

座標系のうちで，慣性の法則が成り立つような座標系を慣性系と言う．このような慣性系は無数に存在する．実際，ある慣性系に対して等速直線運動をしているようなその他の座標系でも，慣性の法則が成り立つことは明らかである．

そもそも座標系は物理現象を記述するために人為的に導入されたものである．したがって，すべての物理法則はどんな座標系で表現しても同一で

あり，自然法則を表す方程式は，一つの座標系から他の座標系へ座標変換をしても，その形を変えないはずである．これを相対性原理と呼んでいる．座標系のうちでも慣性系に限定した座標系間の相対性原理に基づく理論が特殊相対論である．これに対して，加速度運動をしている座標系を含む一般の座標系間の相対性原理に基づく理論を一般相対論と言う．

特殊相対論は次の 2 つの基本原理を出発点とする．

I.　特殊相対性原理：すべての慣性系は互いに同等であり，あらゆる自然法則はどんな慣性系においても同じ形をとる．

II.　光速度不変の原理：慣性系においては真空中の光速度は常に一定で，光源の運動に無関係である．

光速度不変の原理はニュートン力学とは相容れないものである．ニュートン力学では波動が伝わるためには媒質が必要であり，電磁波を伝える媒質としてエーテルなるものがあると考えられた．そうだとすると，エーテル全体が静止しているような「絶対静止空間」とそこでの絶対座標系が存在する．絶対座標系での光速度を c とすれば，それに対して速度 V で運動している光源からの光の速度は，図 2 に示すように光源の運動方向ではその向きにより $c \pm V$ となるはずで，光速度は光源の運動に依存することになる．

地球は絶対座標系の中で公転運動をしていると考えられる．そこでマイケルソン（A.A. Michelson）が考案した干渉計を用いて絶対座標系すなわちエーテルに対する地球の運動を検出しようとしたのがマイケルソン・モーリーの実験である．図 3

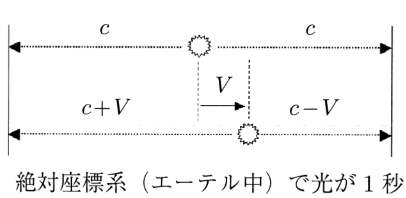


図 2　絶対座標系（エーテル中）で光が 1 秒間に伝わる距離とその間の光源の移動．

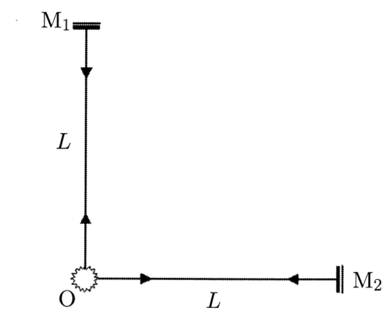


図 3　マイケルソン・モーリーの実験の概念図．

は実験原理を図式化したものである．

点 O には光源と検出器の両方が置かれている．光源を出た光が O から等距離 L に置かれた 2 つの鏡 M_1 と M_2 で反射され，再び O に戻って検出器でカウントされるものとする．実験装置がエーテルに対して静止していれば，2 つの鏡で反射された光は同時に検出器に入る．

もし装置全体がエーテルに対して $\overrightarrow{OM_2}$ の向きに速度 V で運動しているとすると，図 2 に示すように，O から M_2 に向かう光の速度は $c-V$ であり，その反対向きの光の速度は $c+V$ である．一方，O と M_1 を往復する光の速度は c であるから，2 つの鏡 M_1 と M_2 で反射されて O に戻る光はもはや同時ではない．このくい違いは 2 つの光の位相差となって現れ，光の干渉縞を生じるはずである．これを観測することによってマイケルソンとモーリーはエーテルに対する地球の運動を検出しようとした．

彼らの実験結果は否定的であった．すなわち，2 つの鏡によって反射された光は，実験装置の運動いかんによらず同時に O に到達したのである．この事実は，光速度が光源の運動にはよらず一定であり，エーテルなるニュートン力学的な媒質は存在しないことを意味している．

この実験により，ニュートン力学の舞台であった「絶対静止空間」の存在は完全に否定された．そして以下で示すように，我々の空間が時間とは独立に存在する 3 次元ユークリッド空間であるという素朴な捉え方そのものを見直す必要に迫られることになったのである．

3. 時空概念の変革

特殊相対論の基本原理 I, II を出発点としてマイケルソン・モーリーの実験を再考察することにより，相対論の最も特徴的な結果である「運動している時計の遅れ」や「ローレンツ収縮」を導こう．これらは空間と時間に関する我々の素朴な概念に大きな変革をもたらしたのである．

図 3 の実験装置が固定された慣性系を K とし，O を座標原点，$\overrightarrow{\mathrm{OM_2}}$ を x 軸に，$\overrightarrow{\mathrm{OM_1}}$ を y 軸にとる．K 系の x 軸の負の方向に速度 V で運動している慣性系を K' とし，それぞれの系に固定された時計で時間を計る．これら 2 つの時計は $t=t'=0$ のときに両座標系の原点 O, O$'$ が一致するようにあらかじめ時間合わせがなされているものとする．

さて，K 系では $t=0$ に O を発した光は鏡 $\mathrm{M_1}$ および $\mathrm{M_2}$ で反射されて，$t=T$ に同時に O に戻ってくる．この出来事を K' 系で観測したらどう見えるだろうか．同時性の定義により，同一地点で同時に発生した出来事はどの慣性系から見てもそれぞれの時計で測って同時である．(後述するように，異なった地点での同時性は座標系が変わると成り立たない．) したがって図 4 に示したように，K' 系では $t'=0$ に O$'$ を出た光は 2 つの経路をたどった後，$t'=T'$ に同時に K' 系で見た測定器の位置 Q に到達する．

K' 系で見ると装置は x' 軸の方向に速度 V で動いているから，$t'=0$ に O$'$ を出た光が時刻 $t'=T'/2$ に鏡 $\mathrm{M_1}$ に到達する間に $\mathrm{M_1}$ は $(x'=VT'/2, y'=L)$ の位置 $\mathrm{M'_1}$ に移動している．したがって K 系で $\mathrm{OM_1}$ を往復する光は K' 系では $\mathrm{O'}\to\mathrm{M'_1}\to\mathrm{Q}$, $(\overline{\mathrm{O'M'_1}}=\overline{\mathrm{M'_1Q}})$ に沿って進み，時刻 $t'=T'$ で Q に到達する．一方，K 系で $\mathrm{OM_2}$ を往復する光は K' 系では $\mathrm{O'}\to\mathrm{M'_2}\to\mathrm{Q}$ に沿って進み，時刻 $t'=T'$ で Q に到達する．「光速度不変の原理」により，光は K 系でも K' 系でも一定の速さ c で進むから，これら 2 つの道筋の長さは等しい．つまり K' 系では

$$\overline{\mathrm{O'M'_1}}+\overline{\mathrm{M'_1Q}}=\overline{\mathrm{O'M'_2}}+\overline{\mathrm{M'_2Q}} \tag{1}$$

が成り立つ．

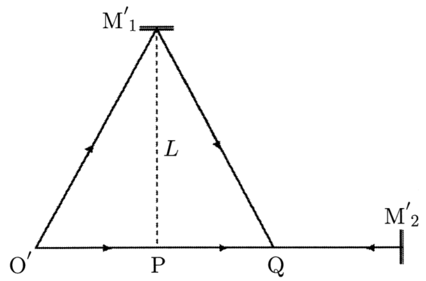


図 4　K' 系から見た光の経路．

まず，図 4 を見て次のことが直ちに言える．

「運動している時計は静止している時計に比べて遅れる．」

実際に，光が光源と鏡の間を往復する時間を時間の単位と考えれば，この装置自身が時計の役目をするものと考えることができる．装置 (時計) が静止している K 系では単位時間は T であり，装置 (時計) が運動している K' 系から見た単位時間は T' である．光が 1 往復の間に進まなければならない距離は，図 4 からも明らかなように，K' 系のほうが長く $(\overline{\mathrm{O'M'_1}}>L)$，したがって $T'>T$ である．このことは運動している時計の刻みがゆっくりであることを意味している．

T と T' の定量的関係を知るためには，直角三角形 $\mathrm{O'M'_1P}$ に着目すればよい．この三角形の各辺の長さは次のようになっている．

$$\overline{\mathrm{O'M'_1}}=c(T'/2),\quad \overline{\mathrm{O'P}}=V(T'/2), \tag{2}$$

$$\overline{\mathrm{M'_1P}}=c(T/2)=L. \tag{3}$$

これらの 3 辺に三平方の定理

$$c^2\left(\frac{T'}{2}\right)^2=c^2\left(\frac{T}{2}\right)^2+V^2\left(\frac{T'}{2}\right)^2 \tag{4}$$

を適用することにより，K 系および K' 系での光の往復時間の関係

$$\frac{T'}{T}=\frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}>1 \tag{5}$$

が得られる．ここで次の記号

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (6)$$

$$\beta = V/c \quad (7)$$

を導入すれば，K 系および K' 系での光の往復時間はそれぞれ次のように表される．

$$T' = \gamma T, \quad T = 2L/c. \quad (8)$$

以上の関係を (2) に用いることにより，図 4 の各部分の長さが以下のように求められる．

$$\overline{\mathrm{O'M_1'}} = \overline{\mathrm{M_1'Q}} = \gamma L, \quad (9)$$

$$\overline{\mathrm{O'Q}} = 2\overline{\mathrm{O'P}} = 2\beta\gamma L, \quad (10)$$

$$\overline{\mathrm{QM_2'}} = \frac{1}{2}\left(2\overline{\mathrm{O'M_1'}} - \overline{\mathrm{O'Q}}\right) = \gamma L(1-\beta). \quad (11)$$

次に長さのスケールについて考察しよう．図 3 で $\mathrm{OM_1}$ と $\mathrm{OM_2}$ は長さ L の直交した 2 本の棒と見なすことができる．これらの棒を，装置に対して運動している座標系 K' で測定したときどうなるだろうか．棒の長さは両端の対応する位置座標の差から求めることができる．このとき注意すべきは，同時刻での位置座標を比較しなければならないことである．

まず，K' 系の運動方向に対して垂直に置かれた棒 $\mathrm{OM_1}$ の長さを K' 系で測定しよう．時刻 $t' = T'/2$ での棒の位置は $\mathrm{PM_1'}$ であるから，その長さは棒の静止している K 系での長さと変わらない．すなわち，運動方向に垂直な長さは，棒が静止していても運動していても変わらない．

次に K' 系の運動方向に平行に置かれた棒 $\mathrm{OM_2}$ の K' 系での長さを測定しよう．まず図 4 の鏡の位置 $\mathrm{M_2'}$ は，$t'=0$ に点 $\mathrm{O'}$ を出た光がこの鏡に到達した時刻での位置である．(10), (11) より，その時刻は K' 系の時計で

$$\begin{aligned} t'' &= \overline{\mathrm{O'M_2'}}/c = \left(\overline{\mathrm{O'Q}} + \overline{\mathrm{QM_2'}}\right)/c \\ &= \gamma(1+\beta)L/c \end{aligned} \quad (12)$$

となる．この時刻での光源の位置を $\mathrm{O''}$ とすれば

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{O'O''}} &= Vt'' = V\gamma(1+\beta)L/c \\ &= \gamma\beta(1+\beta)L \end{aligned} \quad (13)$$

である．時刻 t'' での鏡までの距離は

$$ct'' = \overline{\mathrm{O'M_2'}} = \gamma(1+\beta)L \quad (14)$$

であるから，K' 系での棒の長さ L' は

$$\begin{aligned} L' &= \overline{\mathrm{O'M_2'}} - \overline{\mathrm{O'O''}} = \gamma(1-\beta)(1+\beta)L \\ &= (1-\beta^2)\gamma L = \frac{L}{\gamma} \end{aligned} \quad (15)$$

と求まる．したがって，$\gamma > 1$ より K' 系の中で運動している棒の長さ L' は，棒が静止しているときの長さ L に比べて縮む．

こうして特殊相対論を特徴づける，長さに関する次の命題が成り立つことが示された．

「運動している物体は運動方向に縮む．」

これをローレンツ収縮と言う．

以上の考察から，「運動している時計の遅れ」と「ローレンツ収縮」という特殊相対論のエッセンスは図 4 に含まれていることがわかった．そこから導き出されたものは時間と長さに関する素朴な概念に大きな変革を迫るものであるが，これを空間の捉え方という視点で考えてみよう．

4. ミンコフスキー空間

K 系の位置座標と時間を (x,y,z,t), K' 系でのそれを (x',y',z',t') とする．相対論以前の空間・時間に対する考え方では，時間は位置座標の設定された空間とは独立に存在するものであった．しかし，これまでに見てきたように，時間や長さのスケールは座標系に依存することがわかった．そこで位置座標や時間が座標系のとり方とどう関係しているかを見ることにしよう．

K 系から見ると K' 系は K 系の x 軸の負の方向に速度 V で運動している．運動方向に垂直な $y\,(y')$, $z\,(z')$ 軸方向のスケールは変化しないから，$y=y'$, $z=z'$ としてよい．そこで以下では，(x,t) と (x',t') の関係を調べる．時刻 $t=t'=0$ のとき両座標系の原点 $\mathrm{O}, \mathrm{O'}$ が一致していたとして

$$x' = Ax + Bt, \tag{16}$$

$$t' = Cx + Dt \tag{17}$$

とおいて，係数 A, B, C, D を決める．そのためには両座標系において光の到達した位置と時間を 2 つの点について比較すればよい．

前節の結果から，鏡 M_1 および M_2 に光が到達した時点での鏡の位置座標と，時刻とは K 系および K' 系でそれぞれ次のように与えられる．

$$M_1(0, L/c), \quad M_1'(\beta\gamma L, \gamma L/c). \tag{18}$$

$$M_2(L, L/c), \quad M_2'\big((1+\beta)\gamma L, (1+\beta)\gamma L/c\big). \tag{19}$$

ここで，2 つの鏡に光が到達する時刻は，K 系では同時であるのに対して，K' 系では同時ではないことに注意しよう．光が鏡 M_1 に達した時点では (18) を (16), (17) に代入することにより次式を得る．

$$B = \beta\gamma c = \frac{V}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \tag{20}$$

$$D = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}. \tag{21}$$

次に光が鏡 M_2 に到達した時点では (19) を (16), (17) に代入し, (20), (21) を用いて次の結果を得る．

$$A = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \tag{22}$$

$$C = \frac{\beta\gamma}{c} = \frac{V/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}}. \tag{23}$$

こうして K 系の座標 (x, t) と K' 系の座標 (x', t') とはローレンツ変換と呼ばれる次の関係で結ばれることがわかった．

$$x' = \frac{x + Vt}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \tag{24}$$

$$t' = \frac{t + (V/c^2)\,x}{\sqrt{1-(V/c)^2}}. \tag{25}$$

ここに見られるように位置座標と時間とはもはや別々のものではなく，一つの慣性系から他の慣性系に移ると互いに混じり合う．この意味で位置座標と時間とは同等のものであり，空間としては点 (x, y, z, t) からなる 4 次元空間を考えなければならない．このような 4 次元空間をミンコフスキー空間と言う．こうして特殊相対論は，我々の空間を 3 次元ユークリッド空間から 4 次元ミンコフスキー空間へと変容させたのである．

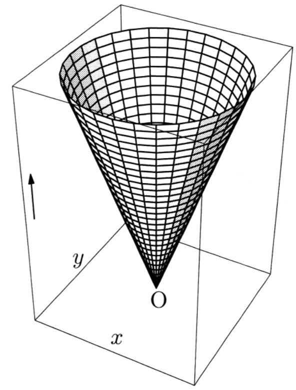


図 5　ミンコフスキー空間中の光円錐．

ミンコフスキー空間を図示するために位置座標の空間が 2 次元 (x, y) の場合を考える．この空間の点 $\mathrm{O}(0,0)$ で時刻 $t = 0$ に放射された光の波面は同心円状に広がっていく．これをミンコフスキー空間 (x, y, t) で表すと，図 5 に示すように，O を頂点とする円錐の母線に沿って光は進行する．この円錐を光円錐と呼ぶ．光円錐は K 系で見ても K' 系で見ても同一であり，座標系の変換に対して不変である．

5. 物質と空間

特殊相対性原理は異なった慣性系の間での物理法則の不変性を主張するものであったが，一般相対論は，これを一般の任意の座標系に拡張する．

慣性系に対して加速度運動をしている座標系を加速系と呼ぶ．乗り物で日常的に体験するように，加速系では加速度の向きと反対方向に力が生じる．これを慣性力と言い，その大きさは質量×加速度で与えられる．したがって，等加速度運動をしている加速系は，加速度方向と逆向きに一様な重力

が働く重力場と同等である．一般に，非慣性系は適当な重力場に同等である．これを等価原理と言う．特に，一様な重力場中で自由落下している座標系ではいわゆる無重力状態が実現し，そこでは慣性の法則が成り立つから慣性系である．

地球が球形で質量分布が一様ならば，地上での重力は地球の中心に向かって働く．図6に示したように，地球の中心に向かう直線 PQ に沿って自由落下する座標系と直線 RS に沿って自由落下する座標系とは異なるから，一様な重力場と違って，地球の重力場を単一の慣性系で表すことはできない．地球の球面上の各点での微小な接平面を考えれば，そこでは重力は鉛直下向きに働き，面内では力は働かないので，これは2次元の慣性系である．これらの微小な2次元慣性系を球面全体にわたってつなぎ合わせることにより，一つの空間が得られるが，それは球面に他ならない．

一般の重力場では空間の各点とその近傍ごとに，自由落下する座標系で表される慣性系を考えることができる．これらの慣性系にそれぞれの時間を付与することにより，空間の各点とその近傍ごとにミンコフスキー空間が対応する．こうして得られたミンコフスキー空間を隣接するものどうしでつなぎ合わせることによって，重力が存在する場合の空間が構成される．

この空間は一般に曲がった空間である．曲がった空間とはユークリッド幾何学の公理が成立せず，空間の2点を結ぶ最短曲線（測地線）が直線とはならないような空間である．球面は曲がった空間の例であるが，球面上の測地線は球の大円に沿った曲線である．3つの測地線で囲まれた領域の周りに沿ってベクトルをそれ自身に平行に移動させて元の出発点に戻っても，ベクトルは元に戻らない．図7の例のように，球面上の点 A で赤道に接するベクトルを赤道に沿って B まで，経度で 90 度平行移動し，次に経線に沿って北極点 C を経由して元の A まで平行移動して戻ったとき，ベクトルの方向は最初のベクトルとは 90 度ずれている．

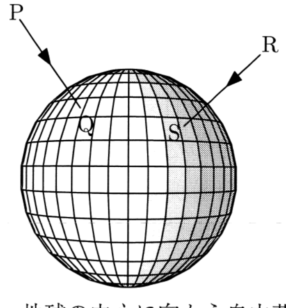


図6　地球の中心に向かう自由落下．

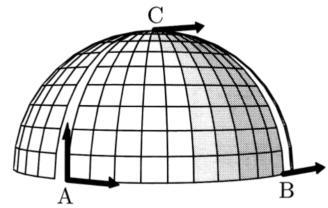


図7　球面上のベクトルの平行移動．

空間の幾何学的性質はニュートンが考えたような「本質的に外界の何ものとも関係なく，均質で不変不動のもの」ではなく，物質分布に伴う重力場によって決まるのである．これが一般相対論によって我々が到達した空間に対する理解である．

これまで見てきたように，相対論は我々の空間の概念を大きく広げた．現代物理学は相対論と量子論によって支えられている．では，この両者に基づいた空間の描像とはいかなるものだろうか．相対論と量子論を統一する理論として超弦理論がある．この理論では4次元ミンコフスキー空間は10次元時空の一部であり，残りの6次元（余次元）空間の幾何学的性質から基本粒子の様々な性質が導かれると考えられている．ここでも空間の性質と物質の存在形態とは密接に関連しているのである．曲がった10次元時空における超弦理論はいまだ研究途上にあり，今後の発展が期待される．

参考文献

1)　風間洋一：『相対性理論入門講義』（培風館）．
2)　ランダウ・リフシッツ：『場の古典論』（東京図書）．
3)　別冊・数理科学「相対論の歩み」（サイエンス社）．

（さとう・ひかる，兵庫教育大学名誉教授）

ファインマン・ダイアグラム

素粒子反応を計算する図



ファインマン本人と彼の車．側面にファインマン・ダイアグラムがたくさん描かれている．この車のライセンスプレートは「QANTUM」．6文字制限のためにQUANTUM（量子）のUを省いたのだろう．アメリカではアルファベットも使える（撮影日：1979年12月1日，撮影者：青山秀明，Irvine，Californiaにて）．

青木　健一

本稿では，物理の研究室の黒板にさりげなく描いてあったり，会議の場でああだこうだと描きあったりするグラフ，ファインマン・ダイアグラム（図1）について説明する．

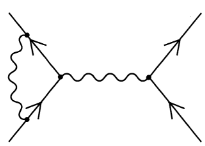


図1　ファインマン・ダイアグラムの例．

ファインマン・ダイアグラムを自由自在に使えるようになることが場の量子論を学ぶ学生の第一目標である．それは，微分と積分に次ぐくらい大事な物理学者の公用語である．

1. 場の量子論の計算は難しい

ファインマン（R.P. Feynman）は，朝永振一郎，シュウィンガー（J. Schwinger）と共に，1965年のノーベル物理学賞を受賞している．その業績は「量子電気力学における基礎的な仕事」すなわち「くりこみ理論」の創造である．

19世紀末，古典物理学の体系は完成していたが，ミクロの世界が垣間見えるところには，徐々に大きな矛盾が立ちはだかりつつあった．それらは20世紀に入って最初の4半世紀の間に，相対性理論と量子力学の建設によって解決され，新たな領域に切り込む現代物理学が始まった．

量子力学は最初，原子の中の電子に適用され，電子の波動性が導入された．程なく，量子力学は電磁気学にも適用され，電場や磁場という「場」についての量子力学，場の量子論が作られる．そこでは，電場・磁場の波としての電磁波や光が量子化されて，光子という量子が現れ，場が粒子性を持つことが示された．この2つが組み合わされて，光と電子の量子力学，すなわち量子電気力学が，最初の場の量子論として表舞台に登場する．1930年代に入り，陽子や中性子，更に湯川秀樹によって予言された素粒子，中間子なども加わり，これらを場の量子論で記述して，それぞれの素粒子の性質や相互作用を研究するのが素粒子論の最前線となった．

量子電気力学は，相対性理論の要求も満たし，相対論的量子力学とも呼ばれた．どんな反応の量子力学的な確率もきちんと計算できるはずであったので，多くの人が競って計算した．しかし，その計算は困難を極め，1つの反応の計算に数年かかることもめずらしくなかった．

日本では，第2次世界大戦の真っ只中，朝永振一郎を指導者とするグループが計算を進めた．量子電気力学は相対論的な理論であるが，当時やられていた計算方法が旧来の非相対論的なやり方を踏襲しており，そのために計算の見通しが非常に悪く多くの人が計算間違いをした．朝永の弟子には計算間違いを悔いて頭を丸めた人もいた．そこまでの真剣勝負だった．そこで朝永は，理論計算を完全に相対論的に行う新しい方法「超多時間理

論」を編み出した．この新しい方法によって，世界と交流の全くない中で，朝永グループは後に世界を驚かせることになる理論展開を進め，戦後にはアメリカ勢を尻目に，無限大の困難を解決する「くりこみ理論」に一気に到達する．

2. ファインマンの手品

同じ頃ファインマンは，極めて独創的に，というよりも，他人と同じことは絶対にしたくないという強い意志のもと，量子電気力学の無限大の困難に立ち向かい，量子力学の新しい理論形式に辿りついていた．それは後に「経路積分」と呼ばれる方法で，量子力学における確率の計算を多重積分で表現する，直観的な量子力学体系である．

この経路積分法によって，相対論的な形式を保ったまま計算を進めることができるのはもちろん，後にファインマン・ダイアグラムと呼ばれることになる「図」を用いる方法，すなわち反応の確率をダイアグラムを経由して単純明快に計算する方法をファインマンは開発して会得した．

ファインマンによれば，ある国際会議で電子と中性子の反応確率の計算結果が報告され，その結果が正しいかどうかが議論になった．そこで，「私は家に帰り，一晩かかって，…，詳しく計算しました．翌朝，会場で …『ゆうべ計算をしてみたのですが，あなたの答と合っているかどうか』と尋ねました．… 彼はびっくりして『なんですって？ ゆうべ計算をなさった？ 私は六カ月もかかったのですよ．』結果を比べる段になると，彼は私のを見てこう尋ねました．『ここにある Q というのはなんですか．この変数 Q は？』…私は答えました．『電子の運動量変化ですよ．電子がいろんな角度に曲がりますから．』彼はまたびっくりして『冗談じゃない．私は Q がゼロになる極限しか計算してありません』… よろしい．私の結果で Q をゼロとおくのは簡単です．それで彼の答と同じになりました．しかし，彼は運動量変化ゼロの場合だけ計算するのに六カ月かかった．私は一晩で任意の運動量変化に対する計算をすましてしまったのです．あのときは感激でした．ノーベル賞をもらったときみたいに胸がわくわくしました．」[1)]

この手品のような計算方法が，ファインマン・ダイアグラムである．理論物理学者の計算能力を数百倍速くしたのだから，上のファインマンの自慢話にも，ただうなづくしかない．

3. ファインマン・ダイアグラム

量子電気力学を例にとってファインマン・ダイアグラムの部品を説明しよう．

ダイアグラムは頂点と呼ばれる複数の線が一点に集まる部分と，頂点の間を結ぶ線で作られる．線は素粒子を表し，線の種類で素粒子の種類を表す．ここでは波線が光子であり，実線は電子である．

相対性理論の帰結として，すべての素粒子には質量が等しく電荷が逆符号のペア，粒子と反粒子が存在する．電子の反粒子は陽電子と呼ばれる電荷がプラスの粒子である．光子では反粒子と粒子が同じで区別がない．ファインマン・ダイアグラムの線は粒子と反粒子を同時に表す．そこで，電子は矢印の向きに走り，陽電子は矢印と逆向きに走る，と決めておく．これを区別するために，電子を表す実線には矢印が加えてある．

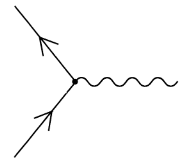


図2　頂点は相互作用を表す．

複数の線が集まる頂点（図2）は相互作用を表す．電子の線が2つと光子の線が1つ，一点に集まっている．電子の線の矢印は1つが内向き，1つが外向きであり，これは電荷が保存することを保証する．頂点は時空の各点を表し，この1つの頂点図が量子電気力学のすべてなのである．すなわち，時空のあらゆる点で（あらゆる場所，あらゆる時刻において），この3つの線が集まる相互作用が可能なのである．量子力学なので，「可能」なだけで，必ず起こるとは限らない．

この1つの相互作用が具体的にどういう過程を実現するかを見るには，時間軸を書き加えて比べる必要がある．図3では，時間の未来の向きを上にとった．各々の線は，上向き，下向き，自由に向きをとってよい．すると全部で8種類の過程が可能であることがわかる．

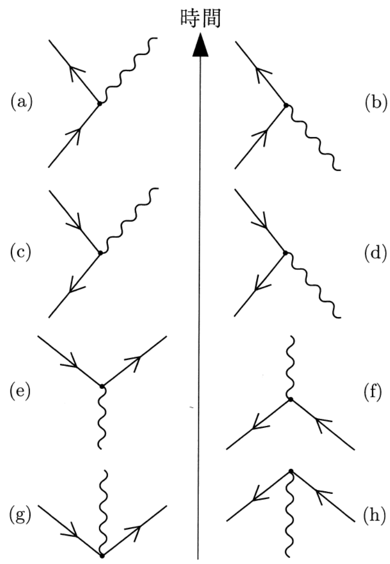


図3　いろいろな物理的過程への対応．

まず(a)では，実線は矢印の向きにそって素粒子が走っているので，これは電子である．光子は相互作用点で生成されて未来に向かって走り去る．従ってこれは電子が走ってきて，光子を放出し，走り去る過程を表している．(b)では，光子が過去からやってきて相互作用点で消えているから，電子が光子を吸収していることになる．(c)では，実線の矢印と逆向きに素粒子が走っているので，陽電子が走っていることになり，陽電子が光子を放出している．(d)では陽電子が光子を吸収している．

さて(e)は，光子が走ってきて，相互作用点で消え，2つの実線になっている．実線の1つは矢印の向きに走る電子，もう1つは矢印と反対向きに走る陽電子である．これは，光子が電子と陽電子の対を生成する過程である．逆に(f)は，電子と陽電子の対が消滅して光子になる過程となる．

(g)は過去に何もなかったところから，電子，陽電子，光子が一気に生成している．そんなことはエネルギー保存則から起こるはずはない？ しかし，量子力学では，そのような「無」から生じる過程も考慮に入れる必要がある．(h)は，電子，陽電子，光子がまとまって消え去る過程であり，これもまた量子力学的な計算には必要なのである．

図2は，時間軸を特定せずに描かれているために，この8つの可能な過程をすべてたった1つの図で表現しているのである．複数の頂点を線で結べば，次々と複雑なダイアグラムが作られていく．1つのダイアグラムと言えども，時間軸を特定したとたんに膨大な種類の具体的な過程の集りとなる．ファインマン・ダイアグラムのすばらしい性質の一つはこの集りをまとめて扱うことにある．当時の計算は，時間軸を特定した具体的な個々の過程をいちいち別々に計算して足していたのだから．

4．ファインマン・ダイアグラムは図であって式である

さて，頂点と線を組み合わせていくと，いろいろな図形ができる．そのとき，ある頂点から出てそのままになっている線を外線，ある頂点から出て別の頂点に入っている線を内線と呼んで区別する．

外線は，考えている反応の始状態と終状態を表す．すなわち，最初に電子と電子があり，反応をして，最後に電子と電子が残っている，という状況なら，外線は始状態用に実線2本，終状態用に実線2本，の合計4本である．

内線は，ある頂点の相互作用で作られ，別の頂点の相互作用で消される粒子を表しており，まさに量子力学的な仮想状態で活躍する粒子たちである．

ある1つの反応を起こす確率をファインマン・ダイアグラムから計算するには次のようにする．

まず，始状態と終状態を決める．これで，必要な外線が確定する．同じ外線を持つ，いろいろなダイアグラムをすべて書き出す．それらは異なる頂点の数，異なる内線の結合の仕方を持っている．

一つ一つのダイアグラムの部品には数式が対応させられる．頂点には，相互作用1回分の因子として e が付与される．e は電子の持つ電荷，素電

荷である．すなわち量子電気力学においては，電子の電荷の大きさとは，ある時空点で電子が光子を放出したり吸収したりする「確率振幅」の大きさに他ならない．内線や外線にもそれぞれ因子が与えられるが，本稿では扱わない．

各ダイアグラムに対応する確率振幅は，1つのダイアグラムに含まれる各部品に与えられる因子の「積」で与えられる．この「積」になるところがファインマン・ダイアグラムの便利な点の二つ目である．そして，すべてのダイアグラムについて，それぞれに与えられた確率振幅を足す．これが，与えられた始状態から終状態に遷移する確率振幅となる．最後にこれの絶対値の2乗をとると，遷移確率が得られる．

このように，ファインマン・ダイアグラムは実は「図」であると同時に「式」なのである．各部品が集まって1つのダイアグラムを作るとき，それは各部品に付与された式の積となる．そして，「同じ外線」を共通に持つダイアグラムをすべて足して初めて，量子力学の確率振幅として意味を持つ．これがいろいろな仮想的中間状態（量子補正）をすべて考慮することに対応する．

ある始状態と終状態を決めたとして，可能なファインマン・ダイアグラムは無限個あることは容易に想像がつくであろう．そこで，私たちは摂動論という考え方を採用する．頂点を1つ使うたびに e という因子が掛かるのだが，これは非常に小さい数である．つまり相互作用はそんなに強くはない．すると，頂点の数の少ないものがまず効き，頂点の数の多いものはより小さな効果しか与えないであろう．従って，e の何次までと決めて計算すれば，可能なダイアグラムの数は有限個になる．これを摂動論と呼ぶ．

5. ファインマン・ダイアグラムで描く反応

例えば，電子と電子が反応して散乱する過程を考えよう．始状態には矢印が内側に向いた実線が2本，終状態には矢印が外側を向いた実線が2本であるから，ダイアグラムは図4のようなタイプ

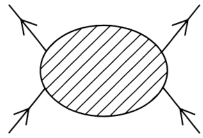


図4　電子と電子が散乱するダイアグラムの構造．

になる．

図4の斜線部には，いくつかの頂点があり，内線がいろいろ飛び回るダイアグラムが入る．この部分を e の次数で分類する．

まず，e の0次では，頂点を一度も使えないので，電子たちはお互いの存在すら感じられず，散乱しない場合となる．これも一つの「可能性」であり，いわば「素通り」だ．

次は e の1次だが，そんなダイアグラムは描けない，一般に e の奇数次を与えるダイアグラムは描けない．この性質は簡単に説明できるので，何故なのか理由を考えてみよう（ヒント：内線の光子に着目せよ）．

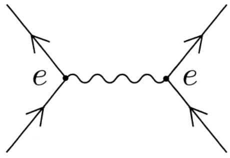


図5　電子と電子が散乱する e^2 のダイアグラム．

さて，e の2次までを考えると，図5がある．実際にこのダイアグラムから反応確率を計算すると，電子と電子が電気的なクーロン反発力を感じて散乱されるという古典的なイメージとぴったりの結果が得られる．ファインマン・ダイアグラムでは，一方の電子が光子を放出し，もう一方の電子がそれを吸収するという過程によって，電子はお互いに反発力を感じるように散乱される，と理解できる．これをもって，電子は「光子を交換」して相互作用する，と言う．

続いて e の4次までを考えてみよう．ぜひ，自分でダイアグラムを描いてみてほしい．ちゃんと全部見つけられましたか？ 正解は図6である．確率を計算するには図5と図6のダイアグラム全部の「和」をとってから2乗することになる．

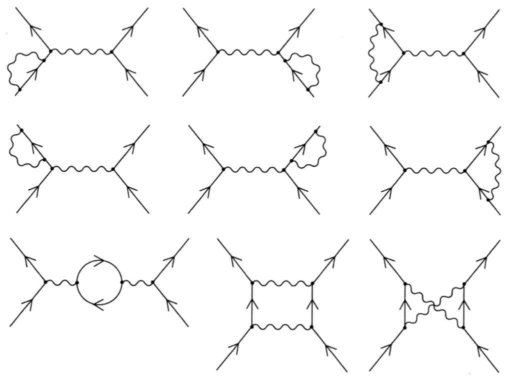


図 6　電子と電子が散乱する e^4 のダイアグラム．

それではファインマン・ダイアグラム免許の試験をしよう．ある波長の X 線を電子によって散乱させると，散乱された X 線は散乱角度に応じてその波長が長くなるというコンプトン効果と呼ばれる現象がある．この現象は，古典的な電磁気学によっては全く説明できない．電磁波が電子によって散乱されるという見方では，散乱されて出てくる電磁波の波長が変わるわけがない．つまり，コンプトン効果の発見は，光の量子性の証明となる．

このコンプトン効果のファインマン・ダイアグラムを描こう．始状態は電子と光子（X 線も光子），終状態も電子と光子である．摂動論で考えて e の 2 次のダイアグラムは図 7 の 1 つである．

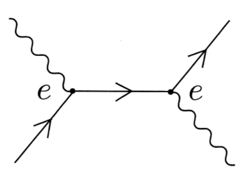


図 7　コンプトン効果の e^2 のダイアグラム．

このダイアグラムを見れば，入る光子と出る光子のエネルギーがずれるのはむしろ当然で，電子に渡したエネルギーの分だけ光子のエネルギーが減り，その分，波長が伸びるわけである．さて，e の 4 次のダイアグラムはどんなものがあるだろうか？ 正解は図 8 である．ところで，光子はどちらが始状態でどちらが終状態？ 実はどちらも可能．だから，両方の場合を足してから 2 乗する．

コンプトン効果の反応確率を最初に計算したのは，クライン（O. Klein）と仁科芳雄であり，その結果はクライン＝仁科の公式と呼ばれている．それは，図 7 のダイアグラムに相当する計算だけをしたもので，それでも 1 年を要した計算だった．ファインマン・ダイアグラムの威力を借りれば，今時の免許皆伝学生なら一晩で計算できるだろう．

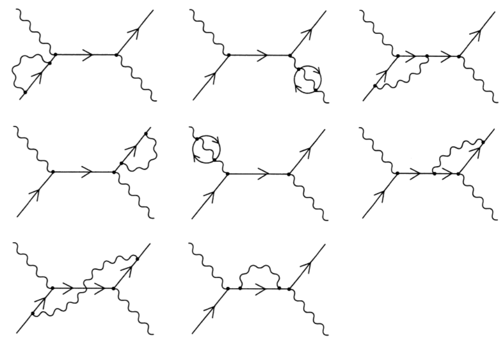


図 8　コンプトン効果の e^4 のダイアグラム．

6. ノーベル物理学賞への道

コンプトン効果の場合，図 7 が最も基本的なダイアグラムであって，これによって計算される反応確率は実験を良く再現する．一方，図 8 のようなダイアグラムを高次補正と呼ぶ．本来，小さい補正のはずである．しかし，その中には小さくループ状になっている部分（図 9）があり，このループの部分から発散（無限大）が現れるのである．

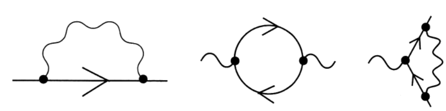


図 9　発散するループ型ダイアグラム．

例えば図 9 の真ん中のダイアグラムでは光子が電子と陽電子に分かれて，また元に戻る過程を表している．電子と陽電子にはいろいろなエネルギーの状態があるが，それらのエネルギーの和が元の光子のエネルギーと一致していればよいので，無限の可能性がある．この無限の可能性の「和」を，この 1 つのダイアグラムは表現しているのだが，その無限和が収束せずに発散してしまうのである．

これが量子電気力学が遭遇した無限大の困難で

あった．朝永らはくりこみ理論を発明して理論を救うことに成功し，ノーベル賞となった[2]．くりこみ理論は場の量子論が持つ理論的な深みを明らかにし，その後の素粒子論の大黒柱に成長した．そのため，ファインマン・ダイアグラムは素粒子論必須の言語となった．

2008年のノーベル物理学賞に輝いた南部陽一郎，小林誠，益川敏英の業績もいくつかのファインマン・ダイアグラムを用いて説明できる．

ファインマン・ダイアグラムは図であると同時に式であるから，ダイアグラムの無限個の和を等比級数の和のように計算することもできる．図10の変形を追えますか？ このような方法で，摂動論を超えた無限和を解析した南部は「自発的対称性の破れ」を発見した．

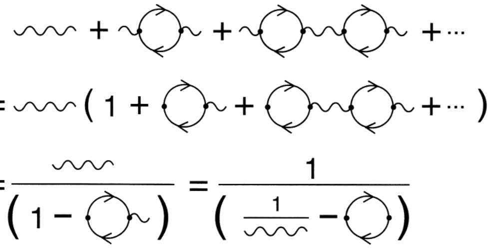


図10　無限個のダイアグラムの和の計算．

小林・益川のCP対称性の破れの理論では，図11のように，K中間子（dクォークと反sクォークでてきている）が反K中間子（sクォークと反dクォークでできている）に転移する（波線は弱ボソンW）．35年前に彼らは毎日ファインマン・ダイアグラムを黒板に描きながら議論したことだろう．

現在の素粒子論は，電磁相互作用に加えて，弱い相互作用と強い相互作用を統一的なゲージ理論で扱い，標準模型と呼ばれる場の量子論で記述されている．標準模型では，含まれる素粒子は数十

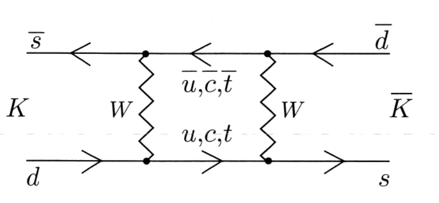


図11　小林・益川理論によるK中間子混合の過程．

個，それらの相互作用を表す頂点の種類は100個にもなり，ある過程を計算するためのファインマン・ダイアグラムの数も高次になればうなぎのぼり，数千個にもなる．今では，必要なダイアグラムのすべてを自動生成し，最終的な反応確率まで自動計算するソフトウェアが開発されている．

ファインマン・ダイアグラムによる計算方法は，今後もずっと使われる，永遠と言ってもよい手法の一つである．それを育んだファインマンの経路積分は，当時は量子力学の「もう1つの定式化」に過ぎなかったが，その後，統計力学との対応を経て，ウィルソンによるくりこみ群の非摂動的定式化に及び，量子力学や場の量子論のはるかに深い理解に導いてくれる必須の概念となった[3]．

ファインマン・ダイアグラムは，ニュートンが運動法則を運動方程式という形で定式化する際に発明した微分・積分という計算手法に匹敵する，物理学史上の革命的な進歩であった．そして概念としての微分・積分のほうはその後，数学において解析学という大分野を形成した．ファインマン・ダイアグラムの母体であった経路積分やその後のくりこみ群の概念が新しい数学を牽引する夢は，起こるに違いない未来風景であると期待する．

参考文献

1) ノーベル賞受賞講演：『物理法則はいかにして発見されたか』所収，R.P. ファインマン（著），江沢洋（訳），岩波現代文庫–学術［初出：ダイヤモンド社 (1968)］．ノーベル財団の公式サイトに全文（英語）が掲載されている．http://nobelprize.org

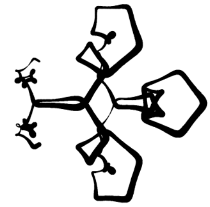
2) 青木健一，「電磁相互作用のくりこみ理論」，数理科学 **533** (2007) 9–16.

3) 青木健一，「くりこみ理論入門」，数理科学 **132** (1989) 34–39，及び，別冊・数理科学『場の物理と数理—素粒子から物性まで—』(1991) 118–123，「素粒子の0電荷問題とその解決—漸近自由理論の発見—」，数理科学 **509** (2005) 37–42 「くりこみ群と素粒子論」，『数理物理への誘い4』（荒木不二洋編）遊星社 (2002) 11–40.

（あおき・けんいち，金沢大学数物科学系）

数理物理におけるヤング図形の効用

共形場の理論，分数量子ホール効果など



白石　潤一

初めて飛行機に乗ったときの感想である．離陸して地面の街が遠ざかり，やがてそれが地図で見るような模様になったことに驚いた．しばらくして，眼下にはるか彼方まで続く雲海が現れ，それをいつまでも飽きずに眺めた．目の前に突きつけられた地球はいつでもこのように大きいスケールで存在するのに，日々の暮らしの忙しさの中でそれを忘れてしまっていたかと反省させられた．

数学においても，「果てしなくどこまでも続くような何かを相手にしているのだ」という感覚を持つことは大切である．

1. パウリの排他律

電子はフェルミ統計に従う量子力学的粒子であり，任意の2つの電子の座標の入れ換えによって波動関数は (-1) 倍される．従って，電子系の波動関数は完全反対称式となる．最も簡単な例として，次のようなスレーター行列式を考えよう：

$$\psi(x)=\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

行列式の列に関する反対称性よりこの行列式は完全反対称式となり，何らかの電子系の状態を表す波動関数と思うことができる．また，完全反対称性より

$$\psi(x)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)$$

とすっきり因数分解されることがわかる．ファンデルモンド行列式と呼ばれるこの大切な行列式は，大学の教養課程では線形代数や微分方程式などで取り上げられる．

2つの電子の座標，例えば x_1, x_2 が（どこでもよい）同一点 y にくるとき

$$x_1 \longrightarrow y \longleftarrow x_2$$

波動関数 $\psi(x)$（確率振幅）は零となる．以下の話との比較のため，念のため式で書けば

$$\psi(y,y,x_3,x_4,\cdots,x_n)=0.$$

2つの電子が同一点ないし同一軌道を占める確率が禁止されるという原理をパウリの排他律と言うのであった．上の簡単な例によってその意味を再確認されたい．

2. パッフィアン

反対称行列

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

の行列式は面白い性質を持つ．もし行列 A の次数 n が奇数ならば $\det(A)=0$ となるが，次数が偶数 $n=2m$ ならば $\det(A)$ はパッフィアン $\mathrm{Pf}(A)$ と呼ばれる量の完全平方 $\det(A)=(\mathrm{Pf}(A))^2$ となる．ここに，パッフィアンは条件

$$1\le r\le m \text{ に対して } \sigma(2r-1)<\sigma(2r),$$
$$1\le r\le m-1 \text{ に対して } \sigma(2r-1)<\sigma(2r+1)$$

を満足するような置換 σ 全体にわたる和

$$\mathrm{Pf}(A)=\sum_{\sigma}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)\sigma(2)}\cdots a_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}$$

と定められる．

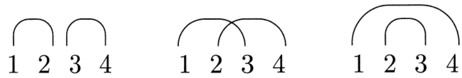
パッフィアンに慣れるために例を見ておこう．$n=4$ のとき $\mathrm{Pf}(A)$ は

$$a_{12}a_{34}-a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23}$$

となり，$n=6$ のときは

$$\begin{aligned}&+a_{12}a_{34}a_{56}-a_{13}a_{24}a_{56}+a_{14}a_{23}a_{56}\\&-a_{12}a_{35}a_{46}+a_{13}a_{25}a_{46}-a_{15}a_{23}a_{46}\\&+a_{12}a_{36}a_{45}-a_{13}a_{26}a_{45}+a_{16}a_{23}a_{45}\\&-a_{14}a_{25}a_{36}+a_{15}a_{24}a_{36}-a_{16}a_{24}a_{35}\\&+a_{14}a_{26}a_{35}-a_{15}a_{26}a_{34}+a_{16}a_{25}a_{34}\end{aligned}$$

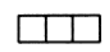
となる．下の図（$n=4$ の場合）のように，パッフィアンに現れる各項は，1 から $2m$ までの数字を 2 つずつ紐で結んで組にするやり方と対応する．また，符号は紐の交差数の偶奇によって定められる．



場の理論において，自由フェルミオンの n 点相関関数を 2 点関数の積の和として表すウィックの公式を知っているならば，この組合せ的ルールがそれと全く同一であることに気がつくであろう．

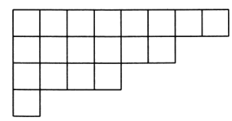
3. ヤング図形[1~3)]

自然数 n の分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots)$ とは，各成分 λ_i が非負整数であって，非増加列 $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots$ であって，総和が $\sum_i\lambda_i=n$ となるものとする．零でない要素 λ_i の数はもちろん有限個に限られるので，その数のことを分割 λ の長さ $l(\lambda)$ と呼ぶ．

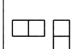
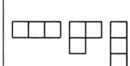
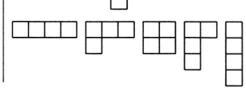
分割 λ は，ヤング図形によって視覚的に表すことができる．例えば，3 の分割について $(3,0,0)=$ , $(2,1,0)=$  というふうにヤング図形は定められる．一般に，分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots)$ は，1 行目に正方形を λ_1 個，2 行目に λ_2 個などと並べて得られるヤング図形と同一視できる．分割 λ の長さ $l(\lambda)$ とはヤング図形の行数に他ならない．

例：

$\lambda=(8,6,4,1)$
$n=19,\quad l(\lambda)=4$



自然数 n に対する分割 λ の数 $p(n)$（n の分割数と呼ばれる数）を数えてみれば，

n	λ	$p(n)$
0	$\emptyset$	1
1		1
2		2
3		3
4		5

等となる．自然数 n の分割数 $p(n)$ の母関数は

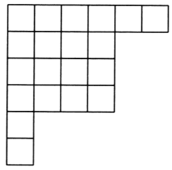
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}p(n)q^n&=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^k}\\&=1+q+2q^2+3q^3\\&\quad+5q^4+7q^5+9q^6+11q^7+\cdots\end{aligned}$$

と書ける．興味のある読者はこの母関数がある自由ボゾン系の分配関数と解釈できることを示してみられたい．

大きな n の分割を考えるとき，λ に同じパーツが繰り返し現れることがしばしば起きる．そのような場合には羃を用いて略記するのが便利である．

例：

$$\lambda = (6,4,4,4,1,1)$$
$$= (64^3 1^2)$$



n の分割に対応するヤング図形全体からなる集合の上に辞書式順序（全順序）を定めることができる．$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots), \mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots)$ を n の分割とするとき，$\lambda \geq \mu$ であることを，$\lambda = \mu$ であるか，または最初の零でない差 $\lambda_i - \mu_i$ が正であることと定める．例えば，分割数を示した上の表においてヤング図形全体は辞書式に並べられていることを確認されたい．

4. モノミアル対称多項式[2,3]

対称多項式を扱うための準備をする．

変数 $x_1, \cdots, x_n$ の対称多項式とは，変数の置換によって不変な多項式のことである．対称多項式全体のなす空間は，多項式の和とスカラー倍の自然な性質によりベクトル空間となる．このベクトル空間の基底として都合のいいものを選んでおきたい．任意の対称多項式は斉次の対称多項式の和に表せるので，斉次対称多項式からなる基底を考えるのがよい．

モノミアル対称多項式 m_λ をモノミアル（単項式）$x^\lambda = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots$ の平均として定める：

$$m_\lambda = \sum_{\alpha:\lambda\text{の相異なる置換}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

ただし，分割 λ の長さ $l(\lambda)$ が n を超えるときはそれに対応するモノミアルを考えることができないが，簡単のためその場合は $m_\lambda = 0$ とおく．

例を挙げよう．3 変数（$n = 3$）で次数 3 以下のモノミアル対称多項式は次のようになる．

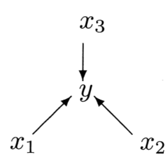
$$m_\emptyset = 1,$$
$$m_{\square} = x_1 + x_2 + x_3,$$
$$m_{\square\square} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$
$$m_{\substack{\square\\\square}} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$
$$m_{\square\square\square} = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3,$$
$$m_{\substack{\square\square\\\square}} = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2,$$
$$m_{\substack{\square\\\square\\\square}} = x_1x_2x_3.$$

モノミアル多項式全体 $\{m_\lambda | \lambda : \text{すべての分割}\}$ は対称多項式の空間の基底をなすことがわかる．

5. 分数量子ホール効果と共形場の理論

2 人でやるババ抜きは実に味気ないが 3 人では面白い．惑星の運動も 2 体問題なら簡単に解けるのに 3 体問題は原理的に解けない問題である．「2 と 3 で違う話」は世の中にたくさんあるが，そのようなことが多項式の世界にもあるのだろうか？

ファンデルモンド行列式は，n 個の座標のうち 2 つを同一点におくと零となるような完全反対称多項式であった．では，n 個の座標のうち 3 つを同一点におくと零となるような対称多項式を作るにはどうすればいいだろうか？



こういう性質をもつ多項式の例は次のようにして作ることができる．偶数個 $n = 2m$ の変数に対して，ファンデルモンド行列式とパッフィアンの積

$$\varphi(x) = \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x_i - x_j}\right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

を考える．この $\varphi(x)$ は対称多項式であって，2 つの変数を同一点においても零にはならず，3 つの変数を同一点において初めて零となる．式で書けば

$$\varphi(y, y, x_3, x_4, \cdots, x_n) \neq 0,$$
$$\varphi(y, y, y, x_4, \cdots, x_n) = 0$$

となる．スペースの関係で，証明は読者に任せる．

例で確認されるならば以下の $n=4$ の例などを用いられたい.

具体例を見よう. $n=4$ の場合 $\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4)$ は 4 次斉次式

$$
\begin{aligned}
& m_{(2^2)} - m_{(21^2)} + 6m_{(1^4)} \\
&= x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2 \\
&\quad -x_1^2x_2x_3 - x_1x_2^2x_3 - x_1x_2x_3^2 - x_1^2x_2x_4 \\
&\quad -x_1x_2^2x_4 - x_1x_2x_4^2 - x_1^2x_3x_4 - x_1x_3^2x_4 \\
&\quad -x_1x_3x_4^2 - x_2^2x_3x_4 - x_2x_3^2x_4 - x_2x_3x_4^2 \\
&\quad +6x_1x_2x_3x_4
\end{aligned}
$$

となり, これはまだ可愛げがある長さの式だが, 因数分解できない.

次に, $n=6$ の場合 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_6)$ は 12 次斉次式

$$
\begin{aligned}
& m_{(4^22^2)} - m_{(43^22)} + 6m_{(3^4)} - m_{(4^221^2)} \\
& +m_{(43^21^2)} + m_{(432^21)} - 3m_{(3^321)} - 6m_{(42^4)} \\
& +3m_{(3^22^3)} + 6m_{(4^21^4)} - 3m_{(4321^3)} + 3m_{(42^31^2)} \\
& +4m_{(3^22^21^2)} - 12m_{(32^41)} + 90m_{(2^6)},
\end{aligned}
$$

となる. これを変数 x_i であらわに書けば巨大な式となり, あたかも飛行機の窓から見下ろす雲海のごとくどこまでも広がる対称多項式のように見える. 数式処理プログラムを使って, この 6 変数の 12 次対称多項式の因数分解を試みても因数分解してくれない. どうも一般の変数 $n(=2m)$ で $\varphi(x)$ は因数分解されない式のようである.

ファンデルモンド行列式はきれいに因数分解されているので 2 つの座標を一致させると零となることは一目瞭然である. しかし, パッフィアンから得られた上の例 $\varphi(x)$ は因数分解できないので, 3 つの座標を一致させると零となる多項式であることの理由は式の見た目からでは読み取れない. 具体例 $(n=4,6)$ の煩雑な式において 3 つの座標を一点に集めると $\varphi(y,y,y,x_4,\cdots)=0$ と零になることは具体的に計算して確認できるものの, それだけでは現象の本質を理解できたとは言えないであろう.

パッフィアンから作った関数 $\varphi(x)$ は, 分数量子ホール効果の基底状態を表す波動関数として提案された関数の例となっている[4]. 文献4) などは, 素粒子物理学で当時隆盛を極めた共形場の理論と物性理論の中心的テーマの一つである分数量子ホール効果の研究の双方を結びつけた例であり, その勢いのある語り口に新鮮なものを感じさせられる. ただし, この時点で 3 点を同一点に集めるとき波動関数が零となるというような性質に注意が向けられているわけではない.

関数 $\varphi(x)$ のもつ「奇妙な零点条件」の由来はカッツ・ムーディー代数 ($\simeq$ 共形場の理論) の可積分表現の理論に求めることができる[5]. カッツ・ムーディー代数の可積分表現は整数のパラメータ k で分類される. k は表現のレベルと呼ばれる. 最も簡単な $\widehat{sl}_2$ の場合, 代数の「カレント」$e(z)$ はレベル k 既約表現空間の上で恒等式 $e(z)^{k+1}=0$ をみたす (即ち $k+1$ 回掛けると零となる). $k=2$ のときは $e(z)^3=0$ でありカレント $e(z)$ を同一点に「3 つ集めると零」となる.

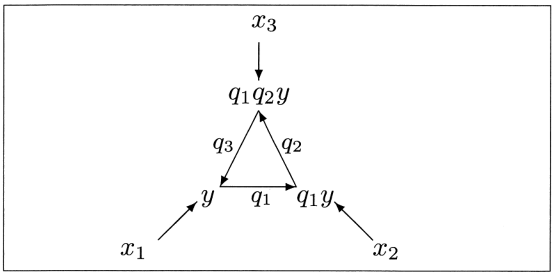
その後, 分数量子ホール効果の波動関数におけるクーロン相互作用の役割と可積分表現における高次の零条件 (の量子類似物) の両者を切り離せないものと見なす研究者が現れた[6]. この方面の研究の背景について少し説明しておこう. 比較的低磁場 ($\nu=5/2$ 等) における分数量子ホール効果の励起状態を与える準粒子は非アーベル的な統計に従い, それが実験や応用上で興味深いと考えられている. 現在, マイクロソフトから研究資金が流れてくるような「熱い状態」で研究が行われていると聞く.

6. 零条件の量子化

前節では 3 つの座標を同一点に集めると零となるような対称多項式を考えたのだが, 同一点という条件を緩めて (もしくは量子化して), 3 点がプランク定数ほどの長さの辺をもつある三角形をなすときに零となる多項式について考えてみよう.

3 つの複素パラメータ q_1,q_2,q_3 が条件 $q_1q_2q_3=1$ を満たしているとする. 3 点 y, q_1y, q_1q_2y は各

辺のベクトルが q_1, q_2, q_3 で与えられるような3角形の頂点となる．3つの座標 x_1, x_2, x_3 がこのような3角形の頂点の上に配置されたときに零となるような対称多項式のクラスを考えたい．



以下ではこれと対になる条件をもう一つ考える．問題はこのような量子化された零条件を満足する多項式のクラスをうまく記述し，それが持つ（かもしれない）「うまい性質」を見出すことである．

実は，フェイギンとオデスキーによってこのような考えが推し進められ，次のような面白い定義が得られた．

定義． $\mathcal{P}_n$ を以下の性質を満足する x_i の多項式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 全体のなす空間と定める．

1. 次数 $n(n-1)$ の斉次対称多項式であり，

2. 展開 $f = \sum_{\lambda \le 2\delta} c_\lambda m_\lambda$ をもち，

3. $n \ge 3$ の場合，輪条件

$$f(y, q_1y, q_1q_2y, x_4, \cdots, x_n) = 0,$$
$$f(y, q_2y, q_2q_1y, x_4, \cdots, x_n) = 0,$$

を満たす．

ここに，$\delta = (n-1, n-2, \cdots, 1, 0)$ である．

「この3つの条件の意味はなかなか理解しにくい」，それが筆者の正直な感想である．しかしながら，以下に少し述べるようにそれからの帰結が美しいだけに何か神秘的にさえ感じられる．

まず，試しに $\mathcal{P}_n$ の次元を計算してみると次のような表を得ることができる．場所の都合で $\mathcal{P}_n$ の次元を $d(n)$ と書いた．また，比較のために条件3（輪条件）を課さなかった場合に得られる空間の次元 $\tilde{d}(n)$ も計算した．

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15
$d(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15
$\tilde{d}(n)$	1	1	2	5	16	59	247	1111

これから $\mathcal{P}_n$ の次元は n の分割数 $p(n)$ と一致すると予想される．

多項式の空間 $\mathcal{P}_n$ の次元が分割数 $p(n)$ となることを証明するためにはどうしたらいいだろうか？面白いことに，ヤング図形を用いて $\mathcal{P}_n$ を「入れ子に分解」するとうまくいく．

n の分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$ に対して，多項式の特殊化によって定められる線形写像 u_λ を

$$\begin{aligned} & u_\lambda f(x_1, \cdots, x_n) \\ &= f(y_1, q_1y_1, \cdots, q_1^{\lambda_1-1}y_1, \\ &\quad y_2, q_1y_2, \cdots, q_1^{\lambda_2-1}y_2, \cdots \\ &\quad \cdots, y_m, q_1y_m, \cdots, q_1^{\lambda_m-1}y_m) \end{aligned}$$

と定める．この特殊化を $\lambda = (6,4,1)$ の場合に図示すれば次のようになる：

y_1	q_1y_1	$q_1^2y_1$	$q_1^3y_1$	$q_1^4y_1$	$q_1^5y_1$
y_2	q_1y_2	$q_1^2y_2$	$q_1^3y_2$		
y_3					

$\mathcal{P}_n$ の部分ベクトル空間 $\mathcal{P}_{n,\lambda}$ を

$$\mathcal{P}_{n,\lambda} = \left\{ f \in \mathcal{P}_n \;\middle|\; \begin{array}{c} \mu > \lambda \text{なるすべての } \mu \\ \text{に対して } u_\mu f = 0 \text{ を満たす} \end{array} \right\}$$

と定めるとベクトル空間の「入れ子」

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{n,(n)} \supset \mathcal{P}_{n,(n-1,1)} \supset \cdots \supset \mathcal{P}_{n,(1^n)}$$

ができ上がる．もし各入れ子に関して次元の差がちょうど1（即ち辞書式順序に関して隣接する分割 $\rho > \sigma$ に対して $\dim(\mathcal{P}_{n,\rho}/\mathcal{P}_{n,\sigma}) = 1$）であることが言えれば $\dim\mathcal{P}_n = p(n)$ が従う．詳細を述べるスペースはないが，定義の3つの条件を用いれば線形写像 u_λ の像が高々1次元のベクトル空間にしかならないことが言えて証明が得られる．

パッフィアンから作った $\varphi(x)$ も巨大な雲のように見える多項式であったが，$\mathcal{P}_n$ のベクトルたちもほとんど「雲海」状態のものばかりで，次数 n が上がればたちまち凄まじい式となる．

7. フェイギン・オデスキー代数，変形 $\mathcal{W}$ 代数，マクドナルド多項式

共形場の理論，分数量子ホール効果の波動関数の零点の性質から始めて，「量子化された零点条件を持つ」多項式のなす空間 $\mathcal{P}_n$ へと話を進めてきた．終わりに，最近の話題に少しだけ触れておこう．

$\mathcal{P}_n$ の上には積の構造が導入されて代数構造を備えた対象となる（フェイギン・オデスキー代数）．これは，可解格子模型等の数理物理で扱われるヤン・バクスター方程式や量子群に関連して導入されたものである．しかしなかなか不思議な対象であって，まだその正体は掴みきれていない．

共形場の理論に現れる代数的な構造である $\mathcal{W}_n$ 代数の量子変形が知られている[3,7,8]（$n=2$ の場合は（変形）ビラソロ代数に対応）．変形 $\mathcal{W}_n$ 代数の基本カレント $T(x)=\sum_n T_n z^{-n}$ が自由場によって構成されているとしよう．次のような最高ウエイトベクトル $|w\rangle$

$$T_n|w\rangle = 0 \quad (n=1,2,\cdots),$$
$$T_0|w\rangle = (w_1+w_2+\cdots+w_n)|w\rangle$$

によって最高ウエイト表現が定められる．ここに，w_i は最高ウエイトをパラメトライズする変数である．

自由場を用いた計算により m 点の相関関数 $\langle w|T(x_1)T(x_2)\cdots T(x_m)|w\rangle$ を容易に計算することができるが，大変興味深い性質をこの m 点の相関関数は備えている．変形 $\mathcal{W}_n$ 代数のパラメータを q_1, q_2 とすると，m 点相関関数 $\langle w|T(x_1)T(x_2)\cdots T(x_m)|w\rangle$ は次の性質を満たす：

1. 変数 w_i に関して，m 次の斉次対称多項式である．

2. 変数 x_i に関して，$\mathcal{P}_m$ の元（即ちフェイギン・オデスキー代数の元）である．

変形 $\mathcal{W}$ 代数とフェイギン・オデスキー代数が結びついていることは，実は，フェイギン・オデスキー代数がマクドナルド対称多項式[2,3]と関係していることを意味する．

3者（フェイギン・オデスキー代数，変形 $\mathcal{W}_n$ 代数，マクドナルド対称多項式）相互の関係を目の前に突きつけられた今，我々はその背後にある数理的構造をどのように掴めばいいであろうか？[10]．

参考文献

1) G.E. Andrews, *The theory of partitions*, Cambridge University Press, (1984).
2) I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials* (2nd ed.), Oxford University Press, (1995).
3) 白石潤一，『量子可積分系入門 Lectures on Quantum Integrable Systems』，SGC ライブラリ **vol.28**，サイエンス社，(2003).
4) G. Moore and N. Read, Nonabelions in the fractional quantum Hall effect, *Nucl. Phys.* **B 360** (1991) 362–396.
5) A.V. Stoyanovskii and B.L. Feigin, Functional models of the representations of current algebras, and semi-infinite Schubert cells. *(Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **28** (1994), no.1, 68–90, 96; *translation in Funct. Anal. Appl.* **28** (1994), no.1, 55–72.
6) M. Kasatani and V. Pasquier, On polynomials interpolating between the stationary state of a O(n) model and a Q.H.E. ground state. *Comm. Math. Phys.* **276** (2007), no.2, 397–435.
7) B. Feigin and A. Odesskii, A family of elliptic algebras, *Internat. Math. Res. Notices* **11** (1997) 531–539.
8) J. Shiraishi, H. Kubo, H. Awata and S. Odake, A quantum deformation of the Virasoro algebra and the Macdonald symmetric functions. *Lett. Math. Phys.* **38** (1996), 33–51; H. Awata, H. Kubo, S. Odake and J. Shiraishi, Quantum $\mathcal{W}_N$ algebras and Macdonald polynomials. *Comm. Math. Phys.* **179** (1996), 401–416.
9) B. Feigin and E. Frenkel, Quantum $\mathcal{W}$-algebras and elliptic algebras. *Comm. Math. Phys.* **178** (1996), 653–678.
10) 白石潤一，2008 日本数学会秋季総合分科会，無限可積分系セッション 特別講演，9 月 25 日（木）於東京工業大学.

（しらいし・じゅんいち，東京大学大学院数理科学研究科）

特集／グラフィックでわかる物理

グラフや画像が示す回転卵の運動

下村　裕

1. 回転卵の運動

コロンブスは卵の端をつぶして卵を立てて見せた．しかし，ゆで卵ならつぶす必要はない．図 1 のように，水平なテーブルに置いて速く回すだけで立ち上がるからである．これは台所で誰しも簡単に確かめられる運動だが，その物理的機構は長年不明であった．立ち上がりは重心の上昇を意味するので，いわゆる逆立ちゴマと同様の運動である．逆立ちゴマはマッシュルーム形をしたお馴染みのコマであるが，それが逆立ちする物理的機構は，重心のずれた球形剛体の力学によって半世紀ほど前に解明された[1]．それに比べて，回転卵の立ち上がりが長年解明されなかった理由は，卵の形が球形では近似できないことにある．しかしながら，卵の初期回転速度が大きい場合，逆立ちゴマのもつ運動定数が近似的に存在することが発見され，回転卵が立ち上がる理由も 2002 年に解明された[2]．さらに，回転卵は立ち上がる途中でテーブルからひとりでにジャンプすることが理論的に予言され[3]，そして後年実証された[4]．本コラムでは，写真やグラフが示すゆで卵の運動を解説する．なお，ゆで卵の最も簡単なモデルとして，回転楕円剛体を取り扱う．

2. 2 時間スケールをもつ立ち上がり運動

まず，図 2 のように座標系を設定する．回転楕円体の重心を原点 O とし，鉛直軸 OZ と回転楕円体の対称軸 Oz がなす角を方位角 θ としている．他の記号については文献 2,3,5) を参照されたい．水平なテーブルに置かれた回転楕円体が，鉛直軸の回りに十分速く回された場合，それはテーブルとの接触点 P で滑ることにより立ち上がる．その運動を支配する常微分方程式系[5] を数値的に解いた例が図 3 に示されている． 回転楕円体は長軸 3 cm，短軸 2 cm とし，動摩擦係数が 0.1，鉛直軸回りの初期回転速度 Ω が $\Omega = 23\,\mathrm{rps}$，の場合に得られた方位角 θ の時間発展である．方位角 θ は $\pi/2$ から 0 まで時間的に減少し，回転楕円体が立ち上がる様子を示している．しかしグラフに示された曲線の変化は単調でなく，細かな振動を伴っている．つまり，回転楕円体はその頭を振り振り徐々に立ち上がるのである．2002 年に得られた解析解[2] は図 3 において太線で示されているが，この振動をならして平均化した方位角 θ の単調変化を表現している．しかし，実際はこの振動するゆらぎを伴うのである．そのゆらぎの振動周期は立ち上がる時間スケールと比べると非常

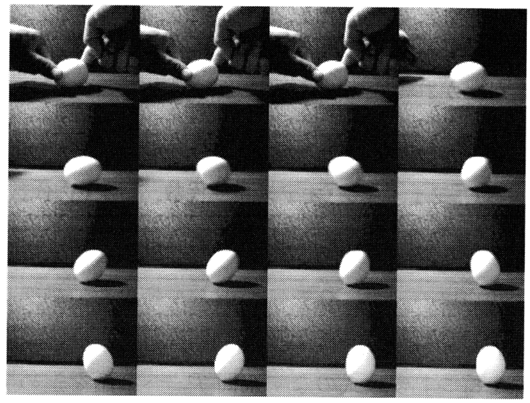


図 1　立ち上がる回転ゆで卵の連続写真（文献 8) より転載）．

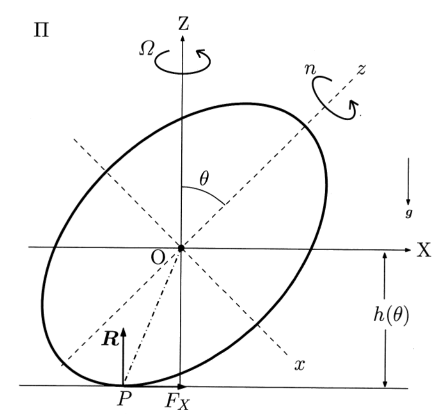


図 2　回転楕円体の運動を記述する座標系[3]．

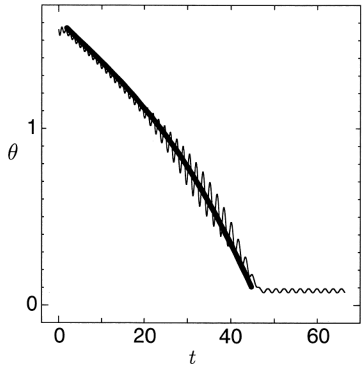


図3　回転する回転楕円体の方位角時間変化．実線：数値シミュレーション，太線：近似解析解．

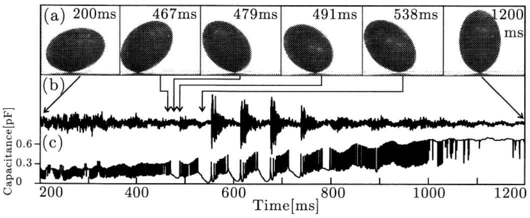


図4　回転する回転楕円体の (a) 画像，(b) 音圧，(c) キャパシタンスの時間変化[4]．

に小さい．つまり，それら2つの時間スケールは分離しており，立ち上がり運動には2個の時間スケールがあることがわかる．これこそ，回転する回転楕円体の立ち上がり運動が2時間スケール法[6]によって解析された[3]本当の理由であり，グラフが示した多重スケール現象の例となっている．

3. 自発的なジャンプ

前節で説明された振動ゆらぎを2時間スケール法で解析的に調べた結果，初期の回転速度が十分大きければ回転楕円体はテーブルとの接触を失い自発的に微小なジャンプをすることが予言された[3]．僅か 1/10 mm 程度のジャンプ高さであるが，接触点 P で働くテーブルからの垂直抗力が消える結果生じる運動である．回転楕円体が跳ぶ様子はアルミ製の回転楕円体を用いた実験でも確認された[4]．図4は，回転する回転楕円体の画像，音圧，(銅板台と回転楕円体からなる単体コンデンサーの) キャパシタンス (電気容量) の信号によって示されたジャンプの実証例だ．画像でジャンプしたと思われる時点でキャパシタンスが急激に減少し，しばらくして着地時の衝撃音が捉えられている．つまり3種類の信号が同期して回転楕円体の自発的ジャンプを示している．さらに注目すべきは，キャパシタンスの時間変化である．自発的ジャンプにより急激に減少したキャパシタンスは，滞空時間の 3/4 のところで極小値をとる．物体がジャンプによって最高の高さに達する時点である．この事実は理論[3]によって予言されていた内容であった．図の詳細な観察から読み取れた実験と理論の合致である．

4. 詳細な解説と研究物語

本コラムに記載した内容のより詳しい解説は，文献 7, 8, 9) にある．また研究の経緯は，一般読者向けの研究物語として書かれた拙著[10]に記載されている．

参考文献

1) N.M. Hugenholtz: *Physica* **18** (1952), 515–527.
2) H.K. Moffatt and Y. Shimomura: *Nature* **416** (2002), 385–386.
3) Y. Shimomura, M. Branicki and H.K. Moffatt: *Proceedings of the Royal Society A* **461** (2005), 1753–1774.
4) T. Mitsui, K. Aihara, C. Terayama, H. Kobayashi and Y. Shimomura: *Proceedings of the Royal Society A* **462** (2006), 2897–2905.
5) H.K. Moffatt, Y. Shimomura and M. Branicki: *Proceedings of the Royal Society A* **460** (2004), 3643–3672.
6) E.J. Hinch: *Perturbation Methods*, Cambridge University Press, (1992).
7) 下村　裕：立ち上がる回転ゆで卵の解，パリティ **18**, 丸善 (2003), 52–56.
8) 下村　裕：立ち上がり跳躍する回転ゆで卵，日本物理学会誌 **62**，日本物理学会 (2007), 699–702.
9) 下村　裕：多重スケール法—回転卵運動への応用，『乱れと流れ』(横井喜充，下村裕，半場藤弘，岡本正芳 編)，培風館 (2008), 53–70.
10) 下村　裕：『ケンブリッジの卵—回る卵はなぜ立ち上がりジャンプするのか』慶應義塾大学出版会 (2007).

(しもむら・ゆたか，慶應義塾大学法学部)

物理学における図の役割

宮下　精二

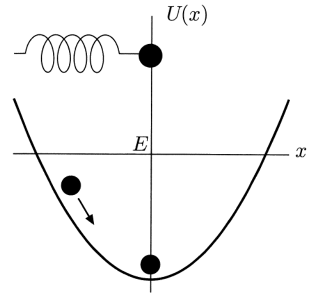


図 1　バネの振動を表すポテンシャル．

物理学は自然現象の仕組みを理解しようとする学問であり，対象の理解，論理の整理の上で図が重要な役割をすることは間違いない．しかし，あらためてどのように役立つのかと問われると少し考え込んでしまう．たぶん，あまりに図に馴れ過ぎているからであろう．そこで，近くにあるいくつかの教科書を見てみた．そこでは，図の役割には 3 つのタイプがあるように思えた．

教科書には多くの図が載っているが，それらの多くは対象となる現象の説明のための図である．例えば，ボールが跳ね返る様子や惑星の軌道図，結晶の図あるいは写真などである．これらの図は，対象をいきなり式で表してもぴんと来ないので物理の仕組みの説明以前に何について考えようとしているのかの周知を目的にしている（タイプ 1）．

次に，対象自身でなく，物理の論理の仕組みを考える上で役立つように導入される図もある．これらは式で得られた結果をグラフにして見せるものである（タイプ 2）．これは理解の確認のために役立つものである．落下の放物線や電気力線，磁力線などはこの範疇であろう．波，光線の直感的理解には図は非常に役立つ．特に，図が本質的な役割をする場合の一つとして，ポテンシャルエネルギーの考え方を用いる場合がある．ポテンシャルエネルギーは実体として自然界にはなく概念上の産物であるが，現象を理解する上で非常に大きな役割をする．バネの振動を図 1 のようにポテンシャルエネルギーをもとに考えればよく分かる気がする．これは，我々が重力のもとで生活しているからであろう．また，電磁気学での磁力線図，特に磁力密度 B か磁場 H の違いなどは印象的である．また，量子力学での波動関数のイメージ図や散乱問題など，やはり基本概念の理解を目的としている．

最後に，実験器具の概要・回路図，設計図のたぐいはそれ自身が内容を持っており，理解のための図と言うより，まさに“描かないとわからない”情報そのものを表していると言えよう（タイプ 3）．

さらに，物理学の研究の道具として用いられる図もある．この特集でも取り上げられているが，分類や計算の道具としての図の利用である．摂動展開でのマイヤー展開の図やファイマングラフ，ヤング図などである．これらの図を見て，内容がわかるためには，それらが表している式の内容をよく理解していなくてはいけない．そうでなければ，ファイマングラフも単なる模様にしか見えない．しかし，一度理解すると図を用いることで，頭の整理が非常に進むということから，このタイプはタイプ 2 とタイプ 3 の中間であると言えよう．

私の専門である相転移の研究でのタイプ 1，タイプ 2 の例を少し考えてみた．臨界現象の普遍性クラスの分類という考え方がある．例えば，すべてのスピンが揃う強磁性体を考えてみよう．この系では，空間の各格子点に矢印としてのスピンがあり，隣どうしのスピンが揃ったときにエネルギーが下がる．そのため，温度が低いときにはスピンが揃って巨視的な磁化が出現する．矢印のタイプにはいろいろな種類があり，スピンが上か下かのどちらかしかとらない場合，イジング模型と呼ばれる．また，スピンが平面内で回れる場合は XY 模型と呼ばれる．いずれの場合にもその系のエネルギーの完全な秩序状態は両系ともすべてのスピンが揃った状態であるが，相転移の普遍性クラスは異なる．それは，スピンがまだ完全に揃わない場合のゆらぎのタイプ（乱れ方）が両者で大きく異なるからである．それぞれの場合を図 2 に

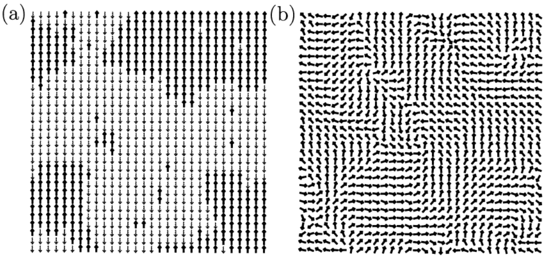


図 2 (a) イジングスピンと (b) XY スピンの秩序化の途中の図．両方ともいずれは完全に揃う．

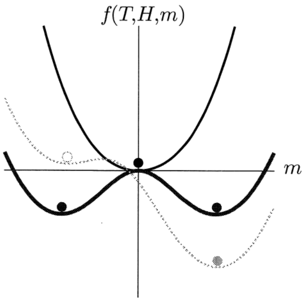


図 3 強磁性体の秩序化を表す現象論的自由エネルギー．

示す．これらの違いは現象を表す式からはよく分からない．このように，式では同じように見えるにも関わらず，非常に異なる現象が生じる場合，具体的な図（タイプ 1）を見ることは考察に大きな役割を果たすと考えられる．

また，上でバネのポテンシャルについて述べたが，ポテンシャルエネルギーの考え方は，力学のみならずより抽象的な問題として熱力学でも用いられる．熱力学の原理は「熱は温度が高いところから低いところに自発的に流れる．」という抽象的なものであるが，エントロピーなどの概念を導入して熱力学ポテンシャルの考え方が用いられる．例えば，温度 T と体積 V を与えたときのヘルムホルツの自由エネルギー $F(T,V)$ や，体積の代わりに圧力 P を与えた場合のギッブスの自由エネルギー $G(T,P)$ などである．しかし，これらの熱力学ポテンシャルは，力学のポテンシャルエネルギーとは異なり，関数自身を最小化する操作の対象ではない．何かある "ポテンシャル" を最小化して求められた最小値が $F(T,V)$ や $G(T,P)$ である．

そこで，特に熱力学的安定性の変化が重要となる相転移現象において，ギンツブルグ–ランダウによって熱力学ポテンシャルを最小状態にもつ "現象論的自由エネルギー" なる考え方が導入された．この考え方では，秩序変数なるものを導入しそれを変分パラメターとするものである．例えば，磁性体の相転移では磁化 m を秩序変数とし，

$$f(T,H,m)=am^2+bm^4+cm^6-Hm$$

なる関数を導入する．$H=0$ のとき，温度が高い場合に相当する $a>0$ では，単一の底をもつ形（図 3：細い実線）になり，$m=0$ が安定であることを表す．それに対して，温度が低い場合の $a<0$ では，ゼロでない m を極小値にもつ形（図 3：太い実線）になる．さらに，この関数は，外から磁場がかかったことを表す $H>0$ の場合は点線に示すような準安定状態の出現も表すことができる．そのため，相転移に伴う磁化の運動，例えば磁化の緩和や磁場を切り替えたときのヒステレシスやそこからの緩和，などもこの現象論的自由エネルギーを用いて議論される．このようにポテンシャルエネルギー（変分関数）の図示は現象の理解に大いに役立つ．

ここで注意しなくてはならないのは，上の磁性体などの例ではよりミクロな理論（平均場近似）からそのような形の現象論的自由エネルギーを考える根拠が与えられるが，この現象論の考え方を，より複雑な現象で秩序変数の意味が曖昧な場合，縦軸も横軸も分からない図で議論を進めることになる．そのような場合，対応するミクロな議論がなく，結論を導くための道具になるおそれがある．このように，図を描くと分かりやすくなるが，だまされやすくなることもあるので注意しなくてはならない．また，一般に図は対象をイメージ化して視覚に訴える利点をもつため，たとえまだ理解ができていなくても，図を見ることで理解を進めることができるのではと期待できる．しかしそれらによって専門家としての物理の理解ができるかどうかは別である．何となく分かったような気にさせることは，それらの結果を応用する場合に危険なこともあるだろう．その場合は，それを式に書くとどうなるか，心に留めておくべきであろう．

最後に，図と理解の上で，もう一つ気づいていることとして，我々，特に私は，図としてイメージできるのは 2 次元までで，3 次元の図となるとなかなかぴんと来ない．3 次元では秩序形態に関していろいろ入り組んだ形があり得，これまでにない新しいタイプが期待される．それらを理解するためには，しっかりとした 3 次元の「図」を書ける必要がある．すらすらと図が描けるようになれば，わかるようになるかもしれない．

（みやした・せいじ，東京大学大学院理学系研究科）

物理におけるグラフィックの役割

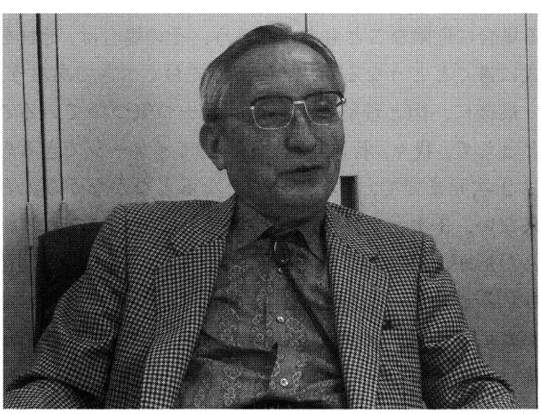
原　康夫（聞き手：編集部）

1. 物理教育における描画理解の重要性 ——絵にも論理がある

——大学に入って学ぶ教養物理では，特に描画で理解するケースが多々あるかと思います．教育の現場で実際にあった話なども含めて，描画の重要性と本質的な意味についてお聞かせせいただけますでしょうか．

最近の私の関心事はわかりやすい基礎物理の教科書を執筆することなので，「適切な描画とは何か」という問題には特に興味があります．

物理学は，放物運動や天体の運行とか光といった，目に見えたり手で触れたりできる現象の法則の探求から始まりました．しかし，その後の研究の進展によって，日常生活で経験する熱現象や電磁気現象，物質の性質などの，目に見えたり手で触れられる世界の法則を本当に理解するには，分子や原子の世界といった直接は目にも見えず手にも触れられない小さな世界のことを知らなければならないことが明らかになったのです．



原康夫氏．

描画が物理学の理解を助けるとすれば，直観的な理解を助ける，ということなのでしょう．しかしこのような物理学の歴史を考えると，目に見えない世界を物理学的に理解する上では，描画の果たす役割には限界がありそうですね．

描画の際には，物理の基礎にある基本的な現象や実験を適切な絵で表せるかということと，数式や法則の説明を絵でどのように表せるかという，2つの問題があると思います．

私の体験によれば，電子の二重性の理解には，外村彰博士の電子の干渉縞の形成過程の写真とその説明だけで十分です．英国物理学会の人気投票で，物理の歴史上で最も美しい実験に選ばれたという事実が私の体験を裏付けています．

教科書の絵や図を理解するには，論理的な能力を必要とすることを常に認識しておく必要があります．教科書に出てくる絵や図は，ある種の画像処理をして描かれているので，学生が教科書の絵を理解するには，脳の中で逆向きの画像処理をする必要があるわけです．絵を見る人は，ある種の

ルールに従ってその絵を見なければ意味を理解できない，ということです．

今お話した脳の中での画像処理の一例として，平面の上に3次元空間の3本の直交する座標軸を描いて立体図形を表すことが挙げられます．

2次元ならわかるかというと現状では難しいのです．これは，1999年に刊行された『分数ができない大学生』（東洋経済新報社）で報告されたすべての調査対象大学で最も理解度の低かった問題が，「$y \leq 3x-2$ と $x \geq 0$ を満たす (x,y) の範囲を図示せよ」であったことからも明らかです．

学生が図の見方を理解できないと情報は得られないわけです．ですから，図をどのように見るかを，しっかりと教える必要がありますね．

物理には論理が必要ですが，絵にも論理があるということをしっかりと認識しておく必要があると思います．絵を描けば直観的に何でも理解できるというものではありません．

2. グラフィカルな教科書について
――未来のテキスト像

――最近では，高校物理の教科書は多色刷ですが，物理教育を考える上での多色刷教科書の利点や日本でのそうした教科書の普及など，未来のテキスト像についてお聞かせいただけますでしょうか．

高校の教科書は多色刷になりましたから，大学生も多色刷のほうがアットホームに感じると思います．私は多色刷（フルカラー）の教科書を3冊刊行して多くの大学で採用して頂いていますが，まだ多色刷の利点や特徴を十分に活用できていないと感じます．

人類が電磁波の中の可視光の部分だけを検知でき，しかも3色で画像処理して，色によって判断する能力を遺伝的に持っている，という事実を多色刷の教科書に活用していくとすると，当然認知心理学が必要になってくると思います．

今までは同じ黒色で表されていた速度，加速度，力などのベクトルが，種類ごとに違う色になっていると，受け取る印象が何か違ってきますね．そうすると，どれを何色にするのが一番いいのか，という配色が問題になってきます．

それと多色刷の本で問題になることとして，学生が特定の色のついている所だけを読んでおけばいいというような安易な見方・捉え方をしてしまうケースです．本離れになっている傾向の対策として色づけの工夫はしても，今度はそれをいかに読んでいくか，見ていくか，ということを学生に理解してもらい，そのためにはどういう配慮をしたらよいかということが，多色刷の本を作る上でのこれからの課題になるでしょう．

3. 数式処理ソフトの効用
――利用する上でのポイント

――コンピュータリテラシの授業強化をする大学が多くなってきていますが，数式処理ソフトやグラフィックソフトを利用する上での効用や，学生が物理の考察を進める上でどんなことが重要になってくるでしょうか．

私は数式処理ソフトを使用したことがないので適切な発言ができませんが，振動現象を記述するには，サイン関数とコサイン関数は不可欠ですし，減衰現象を記述するには指数関数が当然不可欠です．最近では三角関数の教育に数式処理ソフトを使う有効な実践例も報告されているようです．

私が書いた『物理学入門』（学術図書出版社）という教科書では，三角関数を使用する等速円運動の学習の前に，まず一般角の三角関数の説明をしています．

数学と物理の教育を部分的に結び付けるのではなく，基礎数学教育と基礎物理教育を統合した教育が理念として魅力的に映りますが，日本ではまだ成功例はないようです．そうした実状を踏まえて，統合教育実現のためにはまず教材が必要だと考えて『数学といっしょに学ぶ力学』（学術図書出

版社）という教科書を出しました．

数式アレルギーで物理が嫌いという人がいますが，物理学はやはり数式をわかった上で理解することが一番の理想です．例えば，「加速度は力に比例して質量に反比例する」という表現は，数式で書けば $a = \frac{F}{m}$ で済んでしまうわけです．

数学だけ現象と切り離して教えるときの教育効果は，個々の学生によって異なってくるのではないでしょうか．私が学生なら，数式処理ソフトを使う教育では，物理の例題を扱ってほしいと希望すると思います．

それと，物理教育で必要とされる関数概念の理解には，プログラミング言語の教育が適していると私は感じます．学生はよく関数がわからないという質問をしてくることが多いのですが，プログラミングをさせることで関数と変数の理解が進むと思います．プログラムに間違いがあると，計算途中で止まりますから，何かが間違っているのではないかと考えます．論理的思考力の養成という意味でも，利用価値は大いにあると思います．

4. 影響を受けたこと

――先生が研究者（教育者）になるにあたって，個人的に影響を受けたことについてお聞かせいただけますでしょうか．

私は東大の大学院で理論物理学を専攻しましたが，その動機はまず面白そうだと思ったこと，そして国際的に活躍できる可能性に魅力を感じたからです．初めは主に原子核理論を学んでいましたが，分散理論で大きな成果を挙げて米国から帰国された宮沢弘成先生の下で，素粒子理論の研究を始めました．大学院時代には，ビジターとして半年ほど滞在された大久保進さんから，群論に基づいた素粒子模型の話を聞いて，それも勉強し始めました．お二人とも，「何がわかっていて，何がわかっていないのか」をよく理解しておられ，夢と志を持って研究していらっしゃいました．少し年上のそうした先輩方から影響を受けることができて，幸運だったと思います．大学院時代には研究室の大学院生との議論からも学ぶところが多かったことも感謝しています．

大学院を修了して就職した，理論物理学のメッカであった東京教育大学（現在の筑波大学）には，朝永振一郎，宮島龍興，戸田盛和，福田信之先生を初めとする学識豊かな先生方がおられ，広い視野と高い視点から物理を見ることを学べました．

大学を引退してからは，物理の教科書や雑誌の原稿を執筆するのが主な仕事になりました．想定する読者としては，昔の学生諸君の顔を思い出すしかないのですが，ワープロの前でどのように書こうかと迷うときには，今お話した先生方やポスドク時代にお世話になったゲルマン，ファインマン，南部陽一郎といった諸先生方とバーチャルな会話をしつつ，文章を考えていることがしばしばあります．若いときに交わすことができた素晴らしい方々との議論や雑談の影響の大きさを，こうして今，半世紀後になって認識しています．

個人的に影響を受けた数式と言うのが適切な表現かどうか迷うのですが，博士論文を書いていた頃に，ルジャンドル関数 P_l, Q_l の引数の l を複素変数とみなして，複合粒子としての素粒子を複素 l 面の極（pole）に対応させるという Regge pole の理論を研究したことがあります．このときに，数学的に新しい見方をすれば，物理的にも新しい側面が見えることを学びました．

若いときには研究の最前線の刺激に触れることがとても大切だと思います．そういう環境の中でやる気を出していくことが研究者にとって特に必要なことだと思います．

――本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました．

（2008 年 5 月，千駄ヶ谷サイエンスビルにて）

（はら・やすお，筑波大学名誉教授）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

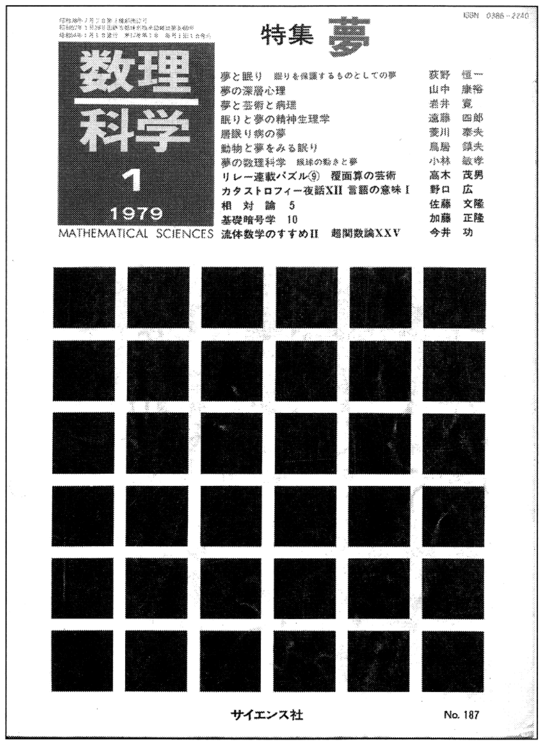
小林　敏孝

1979年1月号

当時の研究から30年を振り返ると「老いて学成り難し」が正直な実感である．本誌1979年の1月号は，当時の精神医学の大御所が名を連ね，意識，睡眠，そして夢に関する特集号であった．上司から，理工学の観点から夢について書くようにと言われ，若輩の私が，自分の学位論文を基に，難産の末まとめたものが「夢の数理科学」であった．

近代科学として夢の研究はフロイト（S. Freud）に始まる．そして，1953年にアセリンスキー（E. Aserinsky）とデメント（WC. Dement）によってREM睡眠が発見され，意識活動が神経科学として研究されるようになり，REM睡眠の機能についても活発に議論がなされるようになった．現在までに「情動情報の処理説」，「不必要な記憶の忘却説」，「記憶の固定説」などの多くの興味ある仮説が提案されている．当時の勤務先であった東京都精神医学総合研究所では健康人から種々の精神疾患の患者さんの睡眠ポリグラフを自由に観察できる環境にあり，彼らの昼間の生活状況と夜間の睡眠の関係に触れることができた．この中で，彼らの日常生活に精神的な活性度が高まるとREM睡眠の長さは延長するが，それよりも増してREM睡眠中の急速眼球運動（REMs）が激しくなる印象が強かった．そこで，REM睡眠の理解にはこのREM睡眠の質的変化が非常に重要であると私は考えた．このREMsの激しさを定量化するために，眼球の運動量を算出し，それをREM運動量（モメンタム）と命名した．これによって，REM睡眠の量的記述と同時に質的記述も可能となった．この方法で夢内容を検討した結果，REMモメンタムが大きい夢ほど，「非常に怖い」とか「精神的に高揚していた」という情動（喜怒哀楽の感情）要素が高かったので，REM睡眠が情動情報の処理に関与している可能性が高いと考えていた．

そもそも，REM睡眠中のREMsは脳の深底にあるREM睡眠の発信源から生じる特殊な神経インパルスの活動（PGO活動）とほぼ同期している．従って，REMモメンタムはREM発信器の発信強度を示すとも言える．最近，このPGO活動が記憶の固定に大きな役割を果たしており，特にエピソード記憶（体験）や情動記憶がREM睡眠で強化され，脳内の既存の記憶空間を更新している可能性が指摘されている．REMモメンタムはまさに我々が昼間一時的に獲得した記憶をREM睡眠で過去の記憶と統合して，脳の然るべき記憶空間に固定している過程を反映しているものと考えられる．我々は夢でその過程を見せられているのかもしれない．

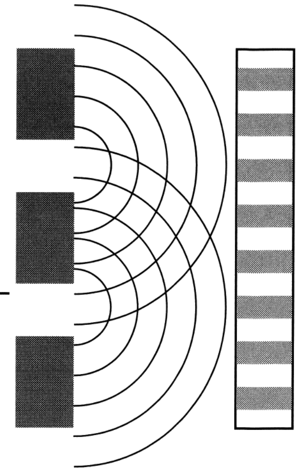


このように，REM睡眠や夢の機能には未知の部分が多く残されているので，これからの研究に期待したい．特に「睡眠と学習の関係」は多くの研究者の注目を集めており，精力的に研究されている．睡眠や夢の理解は今世紀の最も興味ある研究テーマの一つである．

（こばやし・としのり，足利工業大学工学部）

目で見て学ぶ量子力学

第7回 実験でひもとく量子の不思議



二重スリットの実験のその後

外村　彰

7.1 はじめに

前回は，先端技術の進展によって実行可能になった“ファインマンの二重スリットの思考実験”を紹介した．今回は，この実験の意味や，その後の発展について触れてみたい．

この実験では，電子を1個ずつ間をおいて二重スリットに送る．このため，装置の中には，電子は，ほとんど存在しない．ほんの時たま1個の電子が通るだけである．それなのに電子を積算していくうちに，電子の波が2つのスリットを同時に通ったときに生じる干渉縞が姿を現す．と言うことは，1個の電子が2つに分かれて2つのスリットを通ってしまったのだろうか？ あるいは，本物の電子はどちらか一方のスリットを通っただけだが，もう1つのスリットの存在を知っていたのだろうか？[傍注1]　あるいは，いろいろな世界があって，ある世界では，電子は右のスリットを，別の世界では左のスリットを通るのか？[傍注2] どんな解釈をしようが，我々の日常生活では，そんなことは目にすることはない．量子力学は，日常生活では成り立っていないのだろうか？ あるいは，マクロな物体では，干渉させるための条件を整えることができないだけのことなのだろうか？

［傍注1］ L. ド・ブロイは，電子には仮想的な波が付随していると考えた．

［傍注2］ J. ホイーラーの弟子のH. エベレットは，波動関数の収縮を嫌って，多世界解釈を提案した．量子力学では，電子はいくつもの状態を同時にとることができる．それをいくつもの独立の世界が並行して存在すると考えた．

頭の中で，いろいろ考えてみても何も進展しないのなら，実験をやってみれば，ひょっとすると手がかりがつかめるかもしれない．例えば，電子よりずっと大きな粒子も，2つの分身に分かれて，二重スリットを同時に通るのだろうか？ ビー玉のようなマクロな物体を二重スリットに入射したときには，干渉は起こらないと思うが，それならどこまでが限界なのか？ こんなことを考えていくと，量子力学の基本に触れ，新しい問題に発展することがある．今回は，そんな世界に踏み込んで，途方もないことを考えてみよう．

7.2 マクロな粒子が２つのスリットを通るのか？

これまで紹介してきたのは小さな電子の干渉であった．大きい粒子と言っても，高々，中性子の干渉であった．いずれも，電子顕微鏡を使っても見ることのできない小さな粒子なので，「ひょっとすると，そんな不思議なこともあるのかなあ」という感じで受け止めていた．しかし，最近では，もっと大きな分子の干渉が可能になった．

ウィーン大学のA. ツァイリンガーたちは，C_{60} 分子が回折を起こすことを示した．C_{60} と言えば，サッカーボールと呼ばれ，電子顕微鏡で見れば，マクロな粒子である．こんなに大きな分子が，2つに分かれて，両方のスリットを通ってしまうと考えると，不思議でたまらない．ツァイリンガーは，それならさらに大きな蛋白質やビールスを送って干渉現象が起こるかどうかを調べてみようと言って，これまでに“ポルフェリン”と呼ばれる生体分子を使って干渉現象を検出している．量子の不思議は，どんどんマクロな領域に侵入しつつある．こうなると，ひょっとして，朝永振一郎の「光子の裁判」が現実のものになって，人間までもが姿を消して2つのドアを同時に通り抜けられるのでは，と思うだけで好奇心がわいてくる．

7.3 電子はどちらのスリットを通ったのか？

スリットを通る電子に気づかれないように，電子が通過したかどうかを，そっと見ることはできないものだろうか？ R.P. ファインマンも，「スリットのすぐ後方で光をあてて，どちらのスリットを通るか見たらどうなるのか？」という思考実験を考えている．

かつて，A. アインシュタインは，アインシュタイン–ボーア論争で，スリットを通って回折した（曲がった）電子がスリット板に与えた力を測定すれば，どちらのスリットを通ったかを知ることができるので，スリットを通る電子と干渉縞を同時に観測できるはずだと主張した．N. ボーアに不確定性原理で反論されてしまったものの，こんな類いの実験に挑戦してみたら，ひょっとすると，量子力学の謎が氷結するような実験結果が出てくるかもしれない．そんなことをひそかに期待し，1960年にW.H. ファリーとN.F. ラムゼー[1)]が考案した思考実験を参考にしながら，きれいな実験を20年も前から考え続けてきた．ファリーとラムゼーは，スリットの背後に金属円筒を置いたり，2つのスリットの間に小さなコイルを置いたりして，スリットを通る“電荷”や“磁場”を検出しようとした．しかし，実際の実験を行おうとすると，事は容易ではなく，考えるたびに挫折をくり返してきた[傍注3]．

考えあぐねて，1989年，第3回ISQM（International Symposium on Foundations of Quantum Mechanics in the Light of New Technology）で来日していた先生方に議論してもらったことがあった．

［傍注3］ 電子がどちらのスリットを通ったかを検出する干渉実験に関連して，『犀の角たち』（佐々木閑，大蔵出版，2006年）という面白い本がある．日本学士院会員の浜　清先生に奨められて読んだ．2008年7月に亡くなられた戸塚洋二氏もブログの中で触れていた．仏教学者の大変興味深い解釈が述べられている．

7.4 鳩山シンポジウム

ISQM は，東京・国分寺の日立中央研究所で開催されたが，量子力学の基礎問題に関心のある先生方に，埼玉県鳩山に建設中だった基礎研究所までバスでお越しいただいた．研究所の建屋は未完成だったが，水戸の工場でちょうど開発を終えたばかりの 35 万ボルト電子顕微鏡をご披露しようと，電子顕微鏡棟に仮設の電柱を立てて装置を稼動させ，シンポジウムと同時に見学会を行った．

参加してくれたのは（図 7.1），C.N. ヤン（ニューヨーク州立大学），ド・ブロイ門下の J. ヴィジエ（CNRS: フランス国立科学研究センター，パリ），中性子干渉の H. ラオホ（原子力研究所，ウィーン）と A.G. クライン（メルボルン大学），AB 効果の理論の M. ペッシュキン（アルゴンヌ国立研究所），そして G. エクスポン（ストックホルム大学），B. ナーゲル（スウェーデン王立工科大学），中嶋貞雄（東海大学），大貫義郎（名古屋大学），江澤洋（学習院大学）といった先生方であった．そのときのプログラムの内容を図 7.2 に示す．当時，我々

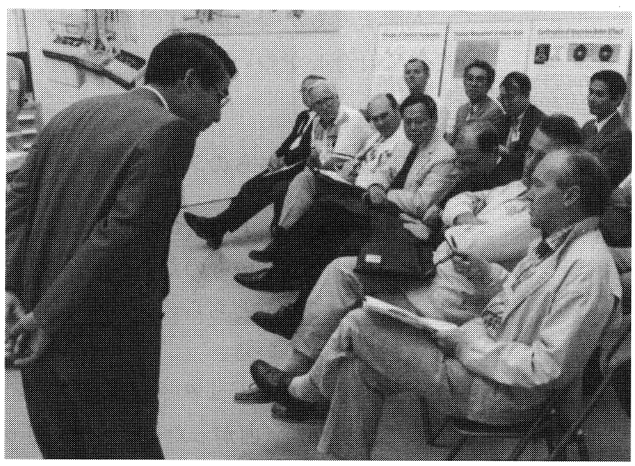


図 7.1　第 3 回 ISQM のサテライトとして行われた鳩山シンポジウムの様子．

"What's next in electron holography?"

1) Recent developments of electron holography
   - ·Observation of magnetic flux quanta
   - ·Measurement of atomic surface topology
     −Refraction electron holography−
   - ·New apparatus
     −350kV holography electron microscope−

2) What's next?
   - ·Double slit experiment
     −Can path and interference pattern be both measured? −
   - ·Aberration-free electron microscope
     −Gabor's dream−
   - ·Phase contrast electron microscopy to observe living molecules
   - ·Dynamic observation of flux quata
     −A step to get a large current superconductor−

図 7.2　鳩山シンポジウムのプログラム（1989 年）．

が何をやりたかったかが分かる．電子がどちらのスリットを通ったかの実験だけでなく，磁束量子の観察や電子レンズの収差補正などを議論してもらった．

結局，どちらのスリットを通ったかを検出する実験の具体的なアイディアはまとまらず，実験に着手できなかった．どちらのスリットを通ったかの実験は，後に光子を使って行われている．光には，いろいろな道具がそろっているのでうらやましい．

私の狙う実験は，いつもこんな“ざま”である．第15回，第16回で触れる磁束量子の観察実験も，初めの検討を始めてから予備実験を経て，超伝導薄膜中の磁束量子の動的観察に至るまでに，15年もの歳月を要している．モノポール探しの実験**傍注4**，単一電子の電荷の測定，磁束量子の芯にあると思われる電荷の検出，流れの中での渦糸（磁束量子）に働くマグナス力**傍注5**による動きの観察などは，検討段階のまま実験に至らなかった．

この実験では，電子に力が加わらないようにして電子がどちらのスリットを通ったかを検出すればよいという訳ではないことが，Y. アハラノフとD. ローリッヒによって明快な形で指摘された[2)]．力を加えずに，電子がどちらのスリットを通ったかを検出できたとしても，アハラノフ・ボーム（AB）効果**傍注6**によって干渉縞が消えてしまうと言う．

[傍注4]　様々な形でモノポール探しが行われていたが見つかっていない．モノポールを“電子線の波”で見れば，波面が螺旋状になる．波面の等高線は連続的でなく，はき出しや吸い込みが直接見える．電荷も分かるので直接の証拠となる．

[傍注5]　流れの中にある渦は力を受ける．これをマグナス力と言う．ボールを回転しながら投げるとカーブする．これも，この力による．磁束量子は超伝導電流の渦糸なので，それに電流が流れると力を受けて動く．

[傍注6]　本連載の第8, 9, 10回で述べる．

7.5 どちらのスリットを通ったかを検出すると，干渉縞が消失する？

アハラノフとローリッヒ[2)]によれば，どちらのスリットを通過したかは，電子に力を加えることなく検出できると言う．ならば，どちらのスリットを通ったという情報も，干渉縞も，ともに得られると言うことなのか？ そうではない．電場も磁場もかけずに電子がどちらのスリットを通ったかを検出したときには，確かに電子に力は働かない．その代わりに電子は電磁ポテンシャルの変化を経験する．このため，AB効果によって電子に位相変化が生じる．ところが，この位相変化は，どちらのスリットを通ったかを決めようとすると，不確定になってしまう．その理由は次に述べる．それが干渉縞を消してしまう．かくして「AB効果は，量子力学の整合性を保つ鍵になる.」と言う．

まず，「一体どうすれば，力を加えずに電子を検出できるのだろうか？」 アハラノフとローリッヒの思考実験を見てみよう．

2つのスリットの間に，金属円筒を置く．さらにその中心軸にワイヤーを張る．これで電子がどちらのスリットを通ったのかを検出できる（図7.3)．ワイヤーは固定され，円筒は自由に回転できる．ワイヤーと円筒には，正と負の同じ電荷を印加してある．円筒が十分に長いと外側には電場は生じないので，電子がスリットを通っても力を受けることはない．電荷を持った円筒が回転すると，電磁コイルと一緒で電磁石になる．磁場は内部に生じるが，外部ではゼロである．このとき外部を通る電子は影響を受けない．

しかしスリットを通り抜けた電子は円筒に作用する．高速の電子が円筒の横を通ると，電子の周りに生じている回転磁場が円筒の中に侵入して円筒内部の

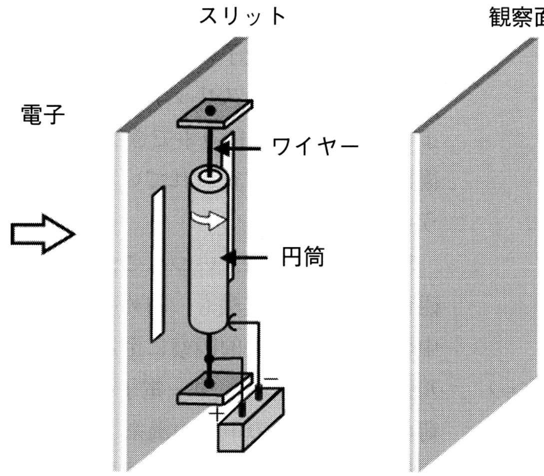


図 7.3　電子がどちらのスリットを通ったかを検出する実験.

磁束を変化させる．電子が右か左のスリットを通ったとき，円筒内の磁束は一瞬，増加か減少をする．円筒内部の磁束が変化すると，ファラデーの電磁誘導の法則に従って回転電場が生じる．この一瞬の電場は，円筒を右回りか左回りに回転させる．この回転速度の変化が正か負かで，電子がどちらのスリットを通ったかが分かる．回転速度の変化は，円筒内部の磁束を変化させるが，ちょうど円筒内部に侵入しようとする電子の磁束を打ち消すのに使われる．

かくして，電子がどちらのスリットを通ったかは，円筒の動きを見れば分かる．しかし，どちらのスリットを電子が通ったが分かり，同時に干渉縞も観測できたとすると，量子力学の基本に反することになる．

7.6 AB 効果で干渉縞が消失する

このパラドックスを解く決め手が AB 効果である．2 つのスリットの間に置いた円筒には磁束が通っているので，2 つのスリットを通る電子線の間には位相差を生じる．どちらのスリットを通ったかを決めようと円筒の回転速度を観察すると，位相差が不確定になってしまい干渉縞を消し去る役割をする．ややこしくなるが，その説明もしておこう．

どちらのスリットを電子が通ったかを知るためには，円筒の回転角の変化 $\delta\phi$ を精度良く測定する必要がある．$\delta\phi$ の正負でスリットの左右を判定するからである．しかし，角度の測定精度には限界がある．$\delta\phi$ は不確定性原理による角度の不確定性 $\Delta\phi$ よりも大きくなくては，正か負かの判断はできない．角度 ϕ と角運動量 L は，粒子の位置 x と運動量 p の間に $\Delta x \cdot \Delta p > h$ なる不確定性があるのと同様，$\Delta\phi \cdot \Delta L > h$ なる関係がある．角度を正確に測ろうとすると，角運動量が不確定になる．つまり角運動量は円筒内部の磁束に比例するので，磁束が定まらないことになる．そして，2 つのスリットを通る電子の位相差は，AB 効果によれば，スリット間にある磁束つまり円筒の角運動量で決まる．

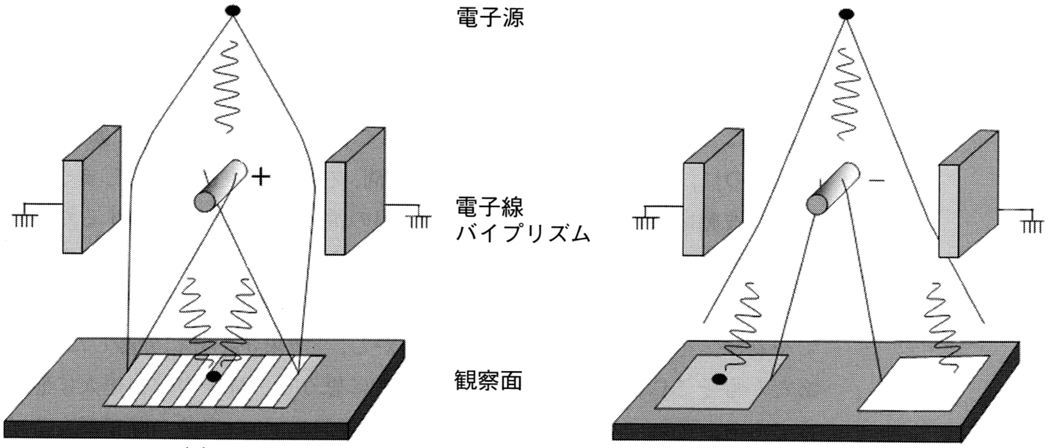


図 7.4　電子線バイプリズムの実験．(a) フィラメントにプラスの電圧をかけたとき．(b) マイナスの電圧をフィラメントにかけたとき．

どちらのスリットを電子が通ったかを判定すべく円筒の回転角を正確に測ると，電子の位相差が不確定になってしまう．きちんと計算してみると，電子がどちらのスリットを通ったかを決めると，電子の位相差の不確定性が 4π を超えてしまう．2つの電子の位相差が定まらなくなり，AB 効果によって干渉縞が消えてしまうことになる．

ファリーとラムゼー[1]は 1960 年に AB 効果の存在を擁護する論文の中で，電子がどちらのスリットを通ったかを検出する思考実験を考えている．そして AB 効果は，量子力学の整合性を保つためにも必要であることをも強調している．

7.7 電子線バイプリズムの実験

電子の不思議はこれに止まらない．干渉実験を行っていると，いろいろな不思議なことに出会う．電子が装置の中をほんの時たま通る場合を考える．電子がバイプリズムにやって来ると，たとえ1個であってもバイプリズムの両側を通り，左右の波は下で重なり合って干渉縞を形作る波動関数を作る（図 7.4 (a)）．観察面に検出器を置くと，1個の電子が現れる．同じ実験を何度もくり返すと，干渉縞の谷の位置には電子がやって来ないことがはっきり分かる．山の位置には，たくさん集まる．やはり電子の波動関数は，バイプリズムで2つに分かれて下で重なって干渉している．

このとき，バイプリズムのフィラメントの電圧を正から負に変えてみよう（図 7.4 (b)）．フィラメントで2つに分かれた波動関数は，今度は重なり合わずに離れ離れに遠ざかっていく．その2つの波動関数が十分に離れてしまったところに検出器をおくと，左右どちらか一方に電子が姿を現す．

電子の波束の長さは，$\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$（$\lambda$：波長，$\Delta\lambda$：波長の不確定値）で与えられる．例えば 100 kV（10 万ボルト）の電界放出電子は，$\lambda = 0.037\,\text{Å}$，$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta E}{2E}$

(E：電子のエネルギー，ΔE：エネルギーの不確定値）なので，$E = 100\,\mathrm{keV}$, $\Delta E = 0.3\,\mathrm{eV}$ とすると，$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 1.5 \times 10^{-6}$ となり，波束の長さは，$2.4\,\mu\mathrm{m}$ となる．バイプリズムから観察面までは 10 cm も離れている．1 m でも 100 m でも離すことはできる．左右に遠く分かれてしまった波束は完全に孤立している．それなのに，左側で電子が検出された瞬間，右側の波束は消えてしまう．あるいは右の波動関数が左に飛んでいって 1 個の電子を作るのに寄与するだろうか？

波束の半分は右側にもやって来ているように思う．何故なら，観察面に検出器を置く代わりに，そこに電子線バイプリズムを置いて 2 つの波を重ね合わせてやれば，そこに干渉縞ができる．しかし，「波束が半分に分離した」などと，あたかもそこに何かが実在しているように思うと，量子力学の達人に怒られそうである．それでも直観を頼りにする実験屋は，つい自分の頭で考えてイメージを浮かべてしまう．

さらに想像をたくましくすると，またもや不思議に出会う．バイプリズムの右側に，1 個の電子の波動関数の全部が来ている訳ではない．半分しか来ていない．「それなら，電子の電荷も 1/2 になって，プリズムの電場で偏向される角度が 1/2 になってしまうのではないか？」などと心配する．そんなことはない．たとえ 1/2 にしても 1/10 にしても，波動関数は一人前に “1 個の電子の電荷” を持つ波として波面は傾けられる．1 個の電子は，たとえ波動関数がどんなに広がっても，いくつに分割されたとしても，相互作用は 1 個の電子として行われる．古典的な考えで直観的なイメージを持とうとすると，不思議なことだらけである．この実験を考えていると，アインシュタイン，ド・ブロイ，M. ボルンたちが考えた箱の中に閉じ込めた電子の思考実験を思い出す．

7.8 箱の中の電子—アインシュタインの思考実験—

「箱の中に 1 個の電子を閉じ込める．真ん中にそっと仕切りを入れてみる．電子はどっちの箱に入っているだろうか？」 アインシュタインやド・ブロイはこんな思考実験を考えた．ビー玉なら，どちらか一方に入ってしまうが，1 個の電子なら，うまくすれば両側に入れることができる．正確な表現をすれば，図 7.4 (b) の二重スリットの状況と同様，観測するまで電子は両側に入っている．「電子はどちらかの箱に入っているが，我々にはそれがわからない」というのとは訳が違う．本当に両方に入っているのである．これが量子力学の基本である．

1 つの箱をパリに，もう 1 つの箱を東京に持って行く．パリの箱を開けてみて電子が出てきたら，東京の箱の中には電子はいなくなってしまう．「無限の速度で情報が伝わるなどということはあり得ないので，量子力学は完全ではない」とアインシュタインは主張した．

しかし，これまでのすべての実験は，量子力学を支持している．A. アスペ[3] たちは，2 つの光子が，スピン上下の対をなして，逆方向に飛び去っていったとき，1 つの光子のスピンを測ったとたんに，もう一方の光子がその逆のスピ

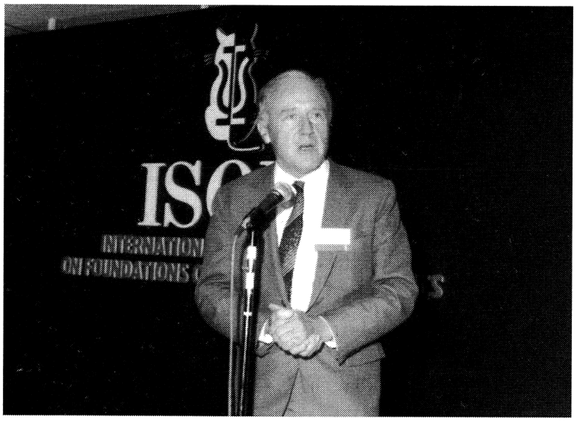


図 7.5　第 1 回 ISQM での J. ホイーラー．量子力学の基礎問題に関心の深かったホイーラーは，2008 年 4 月 13 日 96 才で亡くなった．

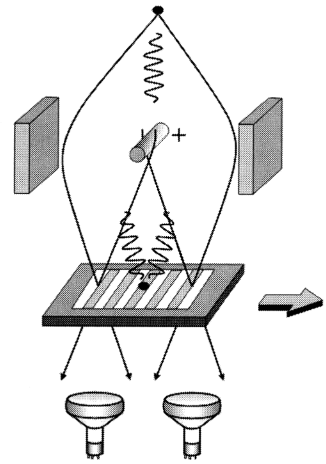


図 7.6　遅延選択実験．

ンになっていることを示す実験結果を得ている．何とも不思議だが，量子力学の予言は正しいことが示された．

最後に，もう一つ，不思議な現象を紹介しておこう．

7.9 遅延選択実験

ブラックホールを予言した J. ホイーラー（図 7.5）は量子力学の基礎問題に関心が深い．ISQM にも 1982 年の第 1 回目から参加している．ここで，Delayed Choice Experiment（遅延選択実験）と呼ばれる面白い実験を発表した．二重スリットの実験で，電子がどちらのスリットを通ったのかを見ると，電子は粒子になってしまい，もはや波としての干渉縞は現れない．それなら，波か粒子かの決定を，干渉縞ができる寸前まで遅らせたらどうなるかというのが，この実験である．この時点で，電子が粒子であることが判明したとすると，電子は過去に遡ってどちらのスリットを通ってきたという粒子性を選択したことになる．

C. アレーは，この会議では，実験を行っている最中であるという報告をしているが，3 年後の第 2 回の会議には見事な実証結果[4)]を報告した．

これは光で行った実験だが，電子でもやりたいと思っていたので，電子の場合で説明する（図 7.6）．電子源から 1 個の電子を送る．1 個の電子は電子線バイプリズムの両側を通って観察面に干渉縞の波動関数を作る．これをくり返してたくさんの電子をフィルム上に記録すれば干渉縞が現れる．

通常，電子は電子源からランダムに出てくるが，発射時間を制御することができる．例えば電界放出電子は針先に電圧をかけるだけで放出されるので，ごく短い間だけ電圧をかけたりパルス光を当てたりして，パルス状の電子線を得ることができる[5)]．平均 1 個の電子を含むパルスを作ることもできる[傍注7]．電子はバイプリズムを通って 2 つの波動関数を重ね合わせると，観察面に干渉縞

［傍注 7］　最近，針の先端にフェムト秒レーザーを当てて，パルス電子線を生じる電子銃が開発され，AB 効果を初め面白い実験が可能になった．文献 5) を参照．

の波動関数が生じる．たくさんの電子がフィルムに記録されると干渉縞が生じるが，電子がフィルムに到着する直前にフィルムを取り除くとしよう．「そんなに素早くフィルムを取り去ることはできない」と言うなら，電場をかけて電子を偏向させることもできる．異なった方向に進む2つの波は，フィルムがなくなったのでそのまま進み，図のように離れ離れになってしまう．そこに検出器を置くと，電子はどちらかの検出器で検出される．こうして電子はバイプリズムの右を通ったのか，左を通ったのかが決まる．電子は波動関数が重なり合った所で干渉縞を作るつもりでいたのに，検出直前にフィルムを取り去ってしまったので，バイプリズムの右か左のどちらかを通ったかが分かる．過去に遡って，自分が粒子であり，どの道を通ってきたかを決めることになる．

如何にも難しそうな実験だがアレーたちは，光で実行し，量子力学の予言通りの結果を得た．

これは実験室内の現象である．だが，ホイーラーは宇宙の果てにあるクウェーサー[傍注8]から出た光を用いた実験を提案している．光子が，クウェーサーからまっすぐ地球にやって来る道と重力レンズで曲げられて遠回りしてやってくる道の2つの道を通ってきた2つの光子を干渉させる．2つと言ったが，正しくは1つの光子の2つの分身のことである．数十億年前に出て地球にまでやってきた1個の光子が我々が観測したとたんに，観測方法によって2つの道を通って干渉縞を作ったのか，どちらかの道を通ったかという過去が決まる．壮大な実験である．そもそも，1個の光子が波動関数の形で宇宙に広がってしまっているのに，それが地球で検出したとたんに，地球上の1点に収縮してしまうというのも，すごいことである．

［傍注8］ 宇宙の果てに存在する天体．

ここまで考えると，アインシュタインの言葉が実感できる．「我々が見たから月はそこにあり，見ていないときには，そこにいないことになる」．“観測するまでは見ることのできない波動関数”は，いまだにベールにつつまれている．

参考文献

1) W.H. Furry and N.F. Ramsey: *Phys. Rev.* **118** (1960) 623–626.
2) Y. Aharonov and D. Rohrlich: “Quantum Paradoxes”, Wiley–VCH, Weinheim (2005).
3) A. Aspect: *Phys. Lett.* **54A** (1975) 117–118.
4) C.O. Alley, O. Jakubowicz, C.A. Steggerda and W.C. Wickes: Proc. Int. Symp. Foundations of Quantum Mechanics, Tokyo (1984) 158–164.
5) A. Caprez, B. Barwick, and H. Batelaan: *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 210401/1–4.

（とのむら・あきら，日立製作所フェロー／理化学研究所グループ・ディレクター／沖縄科学技術研究基盤整備機構代表研究者）

視覚の科学と数学
ウェーブレットで探る錯視の世界
最終回

色の知覚と錯視

新井 仁之

6.1 光と色

色の本格的な科学的研究は，17 世紀のニュートンによる光学の実験に始まる．ニュートンは太陽光をプリズムにより，虹のようにいくつかの色の光に分解することができ，さらにそれをプリズムで合成することにより白色光に戻せることを示した．今ではよく知られているように光は電磁波であり，人の視覚により感知できる可視光は，およそ 380 nm から 780 nm 程度までの波長の部分である．ニュートンの実験は，プリズムにより太陽光を波長の異なる光に分解し，そしてさらに合成したことになる．分解した光が虹のように見えるのは，我々がある程度波長の異なった光を異なった色の光として識別できるからである．ただし，色は光に備わった物理的な属性ではない．色は脳が生み出した現象なのである．それでは，ヒトはどのように光から色という情報を計算しているのだろうか？ これは視覚の研究における重要な課題の一つであり，その数学的方法による研究は，我々にとっても大きな目標の一つである．本稿では，その手がかりとして，色の視覚情報処理の数理モデルに関する研究結果の一部を述べたい．そのため，まず色の知覚について，既知のことを我々の数理モデルの研究に関連する範囲で紹介しておく．

6.2 三色説，反対色説，段階説

歴史的には，色覚に関する三色説と反対色説という一見対立する 2 つの説が現れた．三色説は，18 世紀後半に G. パルマー，そして 19 世紀初頭に T. ヤングにより唱えられ，20 世紀に H. ヘルムホルツにより深く研究されたもので，ヤング–ヘルムホルツの三色説と言われている．ヤング–ヘルムホルツの三色説とは，概略的に言って，視覚系には橙，緑，青を最もよく感知できる 3 種類の受容器があり，その反応の組合せが多様な色知覚を生み出すというものである．例えば橙と緑をよく感知する受容器の反応が合わさって黄色の知覚が生ずるといった具合である．これは三原色を混色することにより様々な色が作れるという経験に基づいた発想である．この三色説により色に関する多くの現象を説明することができた．例えば混色の現象を初め，どうして 3 つのタイプの 2 色性色覚者や単色性色覚者がいるのか，といったことが三色説から導かれた．

これに対して反対色説は 19 世紀後半に E. ヘーリングにより提唱された説で，緑–赤，青–黄，黒–白という 3 つのタイプの受容器があるというものである．例えば緑–赤受容器は緑が反応すれば赤が反応せず，赤が反応すれば緑が反応しないとい

う反対的な反応を示し，青–黄受容器も同様の反対的な反応を示す．これは黄には赤味も緑味も感ぜず，また赤味と緑味を同時に感じる色や，青味と黄味が共存する色を知覚できないという，ヒトの実際の色知覚に基づいている．さらに 1950 年代に Hurvich，Jameson 夫妻が打ち消し法を考案し，反対色応答を定量的に測定することに成功した．これにより反対色説は数量化され，反対色応答の特性を定量的に表すグラフが得られた（詳細は文献 3) 参照）．

三色説と反対色説のどちらが正しいかという論争がしばらく続いたが，その対立を解決するような理論として段階説が現れた．これは大まかに言えば，三色説による色の情報処理の後に反対色説による情報処理が行われるというものである．段階説には様々なものがある．例えば Adams, Müller, Judd, Hurvich–Jameson, De Valois 夫妻らがそれぞれ段階説を提唱している．

6.3 神経生理学，心理物理学と色の知覚

前節で述べた理論の多くは，色がどのように見えるかという現象の観察に基づいていたものである．しかし，近年ではその神経生理学的な裏付けも与えられている．これも色の知覚の数学的研究で重要と思われるので，簡単に紹介しておきたい．

初めに三色説を裏付けることとして，第 2 回で述べたように網膜には 3 つのタイプの錐体があることが挙げられる．このことは Tomita *et al* (1967) によりコイの網膜で初めて実験的に明らかにされた．さらに Baylor (1987) はマカクザルの網膜を用いて，錐体の分光感度を精密に測定することに成功し，眼球に関連した補正を加えると，そのデータが等色関数と非常に類似したものになることを示した．一方，反対色説を裏付けるような神経生理学的な事実も発見された．例えば De Valois らはマカクザルの外側膝状体に反対色説に適合した反応を示す細胞があることを発見した．その細胞にはいくつかのタイプがあり，それらは赤い光に興奮し（R^+），緑では抑制される（G^-）ような反応をする R^+G^- 細胞，同様の記法で G^+R^- 細胞，Y^+B^-，B^+Y^-（B は青，Y は黄），黒$^+$白$^-$，白$^+$ 黒$^-$ 細胞である*1)．この他二重反対色（double opponent）細胞が視覚皮質にあることが発見された（Michael, 1978 他）．これは中心と周辺が拮抗するいわゆる拮抗型受容野をもち，中心が R^+G^- で周辺が G^+R^-，中心が G^+R^- で周辺が R^+G^-，中心が B^+Y^- で周辺が Y^+B^-，中心が Y^+B^- で周辺が B^+Y^- といった反応を示すものである．最近では Johnson ら（2001）により color-luminance cell が V1 野にある程度の数存在することが報告された．本稿では扱わないが，この他にも色に反応する細胞に関する研究，また，V1 野より高次の視覚野における色の情報処理に関する研究も数多く行われている．

ところで明暗のコントラストの感度について多重チャネル説（Campbell–Robson, 1968）が知られているが，De Valois 夫妻ら（1988）は色のコントラスト感度について研究し，色に関しても多重チャネル説が成り立つことを示している．多重チャネル説は前回までに述べてきた我々の数理モデルを設計する際にも参考にしているので，ここで説明しておこう．ヒトのコントラスト感度を正弦波から作られる縞模様を用いて測定すると，そのグラフは横軸を空間周波数，縦軸を感度にして，だいたい低周波と高周波で感度が落ちる山型をしている．Campbell と Robson は正弦波の縞模様と周期的な矩形波（以下，矩形波と言う）の縞模様を用いて，両者のコントラスト感度を調べた．その結果，矩形波のコントラスト感度のほうが正弦波よりもおよそ $4/\pi$ 倍高く，低周波ではさらに高くなることを発見した．そして彼らは矩形波のフーリエ級数展開が

$$\frac{4}{\pi}\left\{\sin\frac{2\pi x}{X}+\frac{1}{3}\sin 3\frac{2\pi x}{X}+\frac{1}{5}\sin 5\frac{2\pi x}{X}+\cdots\right\}$$

（ただし周期 X で振幅 1，平均 0 としてある）のようになることに着目し，ヒトが矩形波による縞

*1) 正確には例えば R^+G^- は長波長の可視光での興奮，中波長での抑制を表すため L^+M^- と書くべきかもしれないが，簡便のため R, G, B の記号を用いる（他のものも同様）．

模様を見るときには，視覚系はその基本周波数成分に反応していると考えた．さらに低周波で矩形波のコントラスト感度が正弦波に比べて高くなることから，視覚系はいくつかの独立した空間周波数に関する帯域制限フィルタのようなチャネルからなるという説を提唱した．その後，この説を支持する多くの心理物理的な実験が報告された．さらに神経生理学的な裏付けも得られた（De Valois *et al*, 1988）．

6.4 色に関する錯視と計算機シミュレーション

前節で述べたことは色の知覚に関する基本的な事柄であり，この他にも多くの重要な研究がある．色の知覚は，ヒトに生活上の利便性を与えると同時に，芸術など感動を与えてくれるものでもある．そのため，色の研究は知覚心理学はもとより，脳科学，神経科学，美術などでも興味をもたれる他，様々な産業とも結びついている．色は現在，まさに学際的な研究分野となっている．こういったことからも色の知覚の数理モデルと色の錯視の計算機シミュレーションは，視覚の数理科学的な研究の中でも非常に興味深いテーマであると言えよう．我々は前節までに紹介してきたことを含めて，知覚心理学と神経生理学の実験結果などを基にした色の知覚の数理モデルの構築を行っている．この数理モデルは前回までの輝度に関するモデルを基礎にしている．本稿ではその成果の一つとして，我々の数理モデルを用いた色に関する錯視のシミュレーションの一例を述べることにしたい．

カラー図版 (a)（**表紙裏**）をご覧いただきたい．これは黄色い円板と青い円板が並び，その間は滑らかなグラデーションになっているような図形である．しかしよく見ると，黄色い円板の境界の部分と青い円板の境界のところには輪があるように見える．実はこれは錯視であり，実際には輝度でも色度でも輪はない．ただしここで輝度とは CIELAB における L^*，色度は a^*, b^* を指すものとする．実際カラー図版 (a) の L^*, a^*, b^* のグラフは図 6.1 上段のようになっている．この錯視図形は色の知覚の研究のために，我々がマッハの帯（第 4 回，図 4.4）を丸い形にして色を付けたものである．これを色つきマッハリングと呼ぶことにする．我々の考案した数理モデルにより色つきマッハリングの錯視のシミュレーションができる[1]．そのシミュレーション結果が図 6.1 下段である．第 4 回で述べたようにマッハの帯は輝度に関する視覚の情報処理に起因するものであるが，色つきマッハリングでも輝度による錯視の効果が大きいことがわかる．しかし輝度だけでなく，シミュレーションは色に関する錯視も生じていることを示している．

ここではマッハリングについて述べたが，この他様々な色の対比錯視なども我々の数理モデルでシミュレーションを行なうことができる．

6.5 フラクタル螺旋錯視と色

色は脳が作る現象であることが，色の知覚の研究を難しくしていると言えるだろう．色の視覚情報処理の数理モデル化における一つの目標は，その数理モデルを計算機に実装して様々な色の錯視発生のシミュレーションを行えるようにすることである．なぜならば，もし我々の視覚系が引き起こす色に関する錯視と同じ錯視を計算機が引き起こせば，計算機が出力する色に関する数値と我々の脳が生み出す色がかなり近いものであると考えられるからである．我々は前節で述べたような色つきマッハリングや色の対比についてはシミュレーションを行ったが，さらにそれ以外の様々な色の錯視全般をシミュレーションできるような数理モデルの研究を進めている．ここで，我々がその過程で最近発見したある興味深い現象を述べておきたい．数理モデルによる研究では，こういった現象も定性的かつ定量的に解析できるものでなければならないのである．

第 1 回で新井・新井[2]によるフラクタル螺旋錯視を紹介した（図 1.2 参照）．これは図 6.2 にあるようなフラクタル島と呼ばれるよく知られた自己相似集合[5]の縦横の比率を変えてタイリングして帯状にし，それらを適切にスケールを変えて同

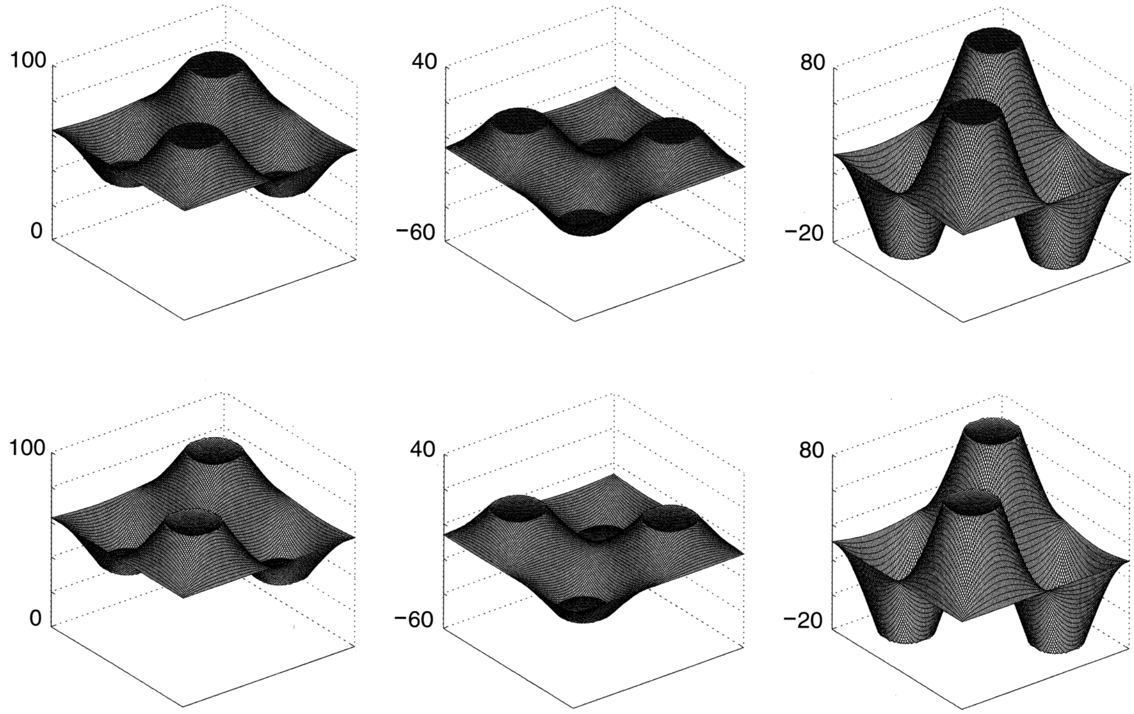


図 6.1　上：色つきマッハリング（カラー図版 (a)）の L^*, a^*, b^* のグラフ．
下：シミュレーション結果の L^*, a^*, b^* のグラフ．

心円状に配列したものである（フラクタル螺旋錯視の詳しい作成方法については新井・新井[2]を参照してほしい）．このようにすると，同心円状に配列されたフラクタル島が渦巻いているように見える．我々はこのフラクタル螺旋錯視に様々な色を付けてみた．すると，例えばカラー図版 (d)（**裏表紙裏**）のような色付けでは，モノクロのフラクタル螺旋錯視（図 1.2）のように，フラクタル島の配列が螺旋を描いているように見えた[*2]．しかし，カラー図版 (e)（**裏表紙裏**）のような色付けでは錯視がほとんど現れず，フラクタル島は同心円状に並んでいる（印刷の都合により色が完全に再現されず，やや錯視が現れることもある）．おそらく (d) と (e) が同じデザインとは思えないかもしれないが，これらは色の付け方を変えただけである．この 2 つの色付けの大きな違いは何かと言うと，(d) では色度のほか輝度も変わるような色づけであるのに対して，(e) のほうは輝度が一定に保たれているのである．この他，いくつかの輝度一定の色付けを試みたが，やはり錯視量が激減することが確認できた．

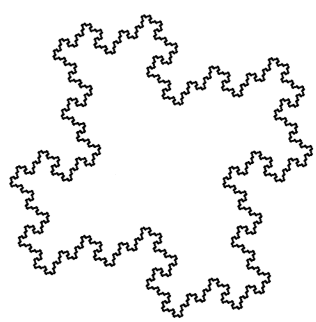


図 6.2　フラクタル島．

ところでフラクタル螺旋錯視以外にも同心円状に配列したものが渦巻いて見える渦巻き錯視はいろいろとある．最初に作られた渦巻き錯視は，1908 年にフレーザーにより考案されたフレーザーの渦巻き錯視である（図 6.3）．これはねじれたような紐を作り，それに飾りをつけて同心円状に並べた

*2)　ただし図を見る場合は，図を真正面から見てほしい．斜め方向からだと錯視に影響を及ぼす．

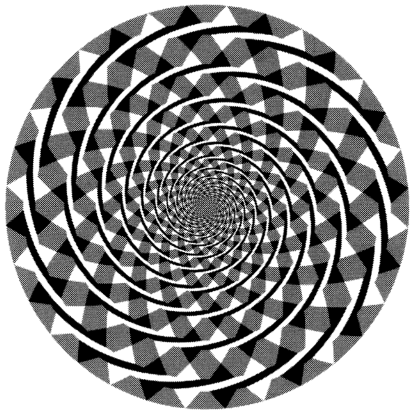


図 6.3　フレーザーの渦巻き錯視.

ものである．このようにするとねじれた紐が同心円状に描いてあるにも関わらず渦巻いて見える．その後，北岡明佳–Pinna–Brelstaff（2001）が傾きの錯視*3)を同心円状に並べると渦巻いて見えることを発見し，数多くの渦巻き錯視を作成した*4)．フラクタル螺旋錯視で見られるような色の付け方による錯視量の劇的な変化は，すべての渦巻き錯視に対して生じるのであろうか．実はすべての渦巻き錯視に対して劇的変化が見られるというわけではない．本節ではそれをフレーザーの渦巻き錯視で検証してみよう．まずフレーザーの渦巻き錯視にカラー図版 (b), (c)（**表紙裏**）のような色を付ける．ここで (b) は (d) と同じ色付けで，(c) は (e) と同じ輝度が一定の色を付けている．(b) では渦巻き錯視を見ることができるが，しかし (c) のように輝度が一定の色付けをしても，多少は弱くなるが渦巻く錯視が知覚される．

どのような視覚の情報計算の結果，フラクタル螺旋錯視はカラー図版 (e) のような色付けでは渦巻かないのか，そしてそもそもフラクタル螺旋錯視（あるいは一般の渦巻き錯視）が渦巻いて見えるのは，どのような視覚情報処理に起因するのか．これを数学的・計算論的に明らかにすることは，現在我々が取り組んでいる問題の一つである．渦巻き錯視の数理科学的研究は，高次の視覚情報処理の数理モデルを構成する上で非常に重要であると考えている．

*3)　傾きの錯視の例としては，例えば第 1 回 1.4 節で紹介したカフェウォール錯視（図 1.7）などがある．いくつかの傾き錯視の数学的な解析は 1.4 節に述べた．

*4)　北岡による渦巻き錯視のいくつかは北岡4)で見られる．

6.6 おわりに

この連載では我々の行っている視覚と錯視の数学的な研究を部分的ではあるが紹介してきた．今回で連載を終了する．しかし現在もこの連載に直接続くような研究を進行させている．実際，平成 19 年より筆者は「ウェーブレットフレームを用いた視覚の数理モデル」の研究を（独）科学技術振興機構さきがけ研究者を兼任して行っている．また平成 20 年度より，著者の所属する東京大学大学院数理科学研究科におけるグローバル COE プログラム「数学新展開の研究教育拠点」の中に視覚研究班も設けられた．筆者の印象では，視覚と錯視の研究において，これからますます数学を用いた研究方法は重要になってくると思われる．

最後になるが，企画の段階からお世話をいただいた数理科学編集部の大溝良平氏に感謝したい．また執筆と図版作成に協力してくれた共同研究者の新井しのぶ氏に感謝する．

参考文献

1) H. Arai, invited paper in Frontiers in Computational Science, Springer-Verlag, 2007, pp.83–89.
2) 新井仁之，新井しのぶ，フラクタル図形を用いた渦巻き錯視について，視覚数学 e 研究室報告 No.3 (2007). http://www4.ocn.ne.jp/~arai/mvel/e-repo.html
3) L.M. ハーヴィッチ著，鳥居修晃，和氣典二監訳『カラー・ヴィジョン，色の知覚と反対色説』誠信書房（原著 1981）.
4) 北岡明佳（監修），『錯視 完全図解』ニュートンプレス，2007.
5) H. Lauwerier, 西川利男訳『初めてのフラクタル 数学とプログラミング』丸善（原著 1987）.
6) 大山正，『色彩心理学入門—ニュートンとゲーテの流れを追って』中央公論社，1994.
7) S. ゼキ，河内十郎訳『脳のヴィジョン』医学書院（原著 1993）.

（あらい・ひとし，
東京大学大学院数理科学研究科/科学技術振興機構さきがけ）

2008年 (1月号～12月号) 総目次

Vol. 46, No. 535～Vol. 46, No. 546

■その他の論文・エッセイ

■書　評

数理科学特集一覧

特　集（2009年2月号予告）

発展する量子力学

21世紀の「量子力学的世界像」

本体 952 円

量子力学の新しい様相	筒井　泉
量子力学のすがた	筒井　泉
干渉と識別の相補性	谷村　省吾
量子状態空間の幾何学	長岡　浩司
量子エンタングルメントの数理	杉田　歩
観測による量子系制御	湯浅　一哉
多体エンタングルメント情報処理	井元　信之
量子エネルギーテレポーテーション	堀田　昌寛
[コラム]	古田　彩
[インタビュー]	筒井　泉

特　集（2008年12月号）

確率論的物理観

数学と物理の共進化

本体 952 円

「数学のノーベル賞」と統計物理学	香取　眞理
SLE—Schramm–Loewner Evolution ローラー・シュラム・ヴェルナー	白井　朋之
三角格子上の臨界パーコレーションの共形不変性 カーディーとスミルノフ	田崎　晴明
群の表現論と極限定理 オルシャンスキーとオクニコフ	洞　彰人
ダイマー模型と幾何学 ケニオンとオクニコフ	高崎　金久
交代符号行列の数え上げ問題 ザイルバーガーとストロガノフ	岡田　聡一
大偏差原理と数理物理学 ヴァラダン	千代延大造
確率論と流体力学極限 ヴァラダン	内山　耕平
確率論的場の量子論 シュポーン	廣島　文生
[コラム] ランダム系のスペクトル	南　就将
《名著に親しむ》複雑ネットワーク上の無限粒子系へ	今野　紀雄
《物理の道しるべ》 第6回	古澤　明
《数学の道しるべ》 第5回	森下　昌紀
《連載》 視覚の科学と数学　その5	新井　仁之

編集後記

今回は，物理をグラフィカルに理解するための様々な手法や効用を取り上げましたが如何でしたでしょうか．青木先生の冒頭にあるファインマンの車の写真や高木先生のスケッチなど，物理には絵心も必要なんだなあと，見ていてとても頭が柔らかくなった気がします．高木先生はよく個展をされますので，興味のある方は先生のHPもぜひご覧下さい．(N)

＊　＊

連載「視覚の科学と数学」は今回が最終回です．如何でしたでしょうか．

先日，オペラを観に行ったとき，CDで聴くのとはストーリーのわかりやすさが全く違うなと感じました．

物事が目に見えるようになってわかりやすくなるのは，分野が違えど，共通のことのようです．(R)

数　理　科　学　1月号

2009年1月1日発行

数理科学編集部　　発行人 木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 サイエンス社　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁